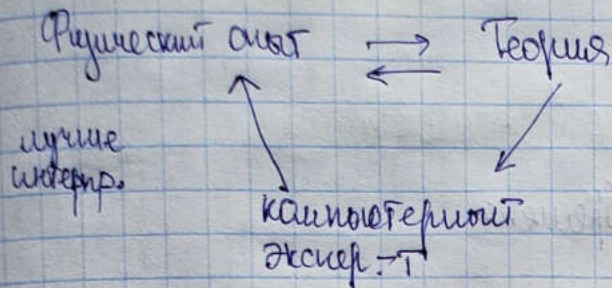


Кандидов Валерий Петрович



Компьютерные демонстрации:

<http://otvp.phys.msu.ru>

План:

Наука и учеба → лекции и практикумы → осень → физика ВП → ссылки по теме.

1. Бегущие волны

2. Спектр

3. Дисперсия

4. Интерференция

5. Дифракция

6. Излучение

7. Волновые пакеты

2 задания на практике

сентябрь-октябрь

Крауфорд "Волны", Петли "Физика колебаний"

2 задания на практике

ноябрь-декабрь

Ахманов, Никитин "Физическая оптика"

Кашитчевский "Волны"

Введение

Звук - волна сжатия, распространяющаяся в упругой среде

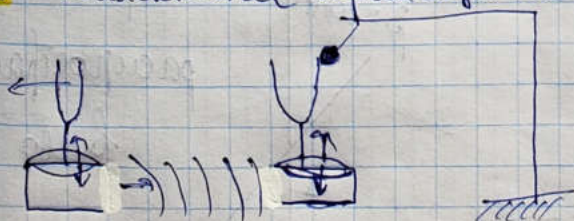


1-ый момент времени

2-ой

3-ий

Звук - коллективное колебание частиц в упругой среде.



крупнопериодическое изменение электрического и магнитных полей

Электромагнитные волны распространяются и в среде, и в вакууме, а звук только в упругой среде.

Раздел I: Бегущие волны.

1) Описание волновых процессов

1.1) Одномерное волновое уравнение.

ζ - возмущение в волне

функция пространства и времени

$\zeta(x, t)$ т.к. распространяется в пространстве и во времени.

$$\frac{\partial^2 \zeta(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0$$

- одномерное волновое ур-е.

$$\{x, t\} \rightarrow \{\alpha = x - ct, \beta = x + ct\}$$

$$\zeta(x, t) \rightarrow \zeta(\alpha, \beta)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta(\alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$$

- ур-е гиперболического типа

$\zeta(\alpha, \beta) = f(\alpha) + g(\beta)$ - общий вид (оставшие зависимости можно подобрать так, что волны будут вырваться влево и вправо)

$$\zeta(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

$f(x - ct)$ - волна правая (бегущая в правую сторону) в положительном

направлении по X.

распространяется влево

$$x_1, t_1 \rightarrow \alpha_1 = x_1 - ct_1 \rightarrow f(\alpha_1)$$

$x > x_1$ при каком времени $t \geq t_1$ у нас будет $\alpha = x - ct = \alpha_1$

$$\text{или } x_1 - ct_1 = x - ct$$

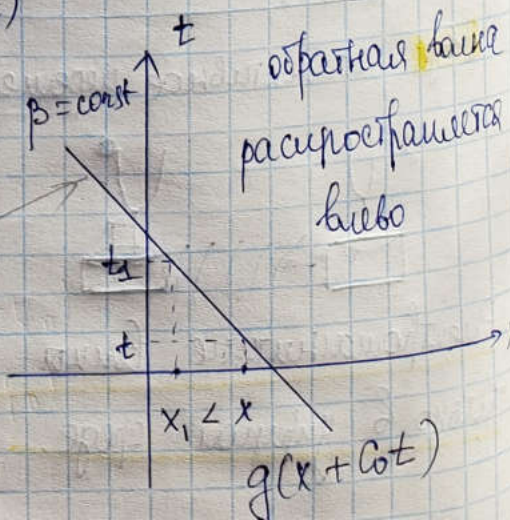
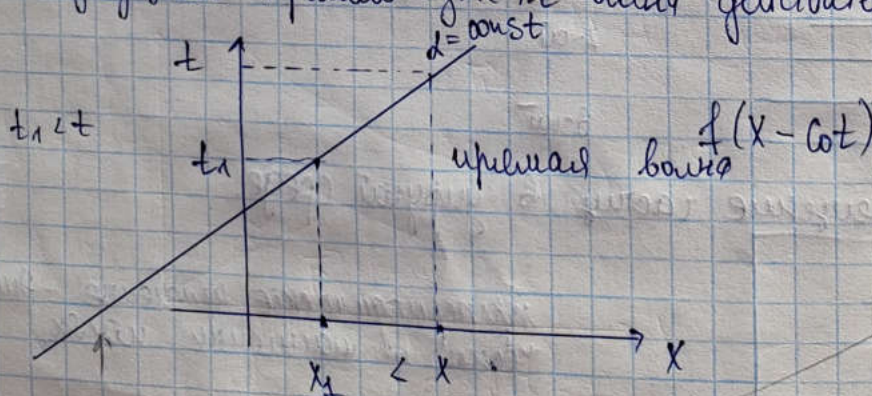
$$t = t_1 + \frac{x - x_1}{c}$$

т.к. $x > x_1$

$$\Rightarrow t > t_1$$

волна бегит вправо по X

$\Rightarrow$ возмущение пришло по мере того, как волна действительно вырвалась.



3) вырваться влево c- вправо c+

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right) \zeta(x,t) = 0$$

↑ **волновой оператор**

по определению двух операторов возмущения, факторизация исходного ур-е выглядит так

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) \zeta(x,t) = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) \zeta(x,t) = 0 \quad - \text{ур-е, описывающее волну, распространяющуюся вправо } \zeta(x,t) = f(x-ct)$$

$$\zeta(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

уравнение переноса (перемещение возмущения)

1.2 Гармоническая волна

$$\zeta(x,t) \sim \cos \varphi(x,t)$$

$$\zeta(x,t) = f(\lambda)$$

φ - фаза
имеет размерность дуги

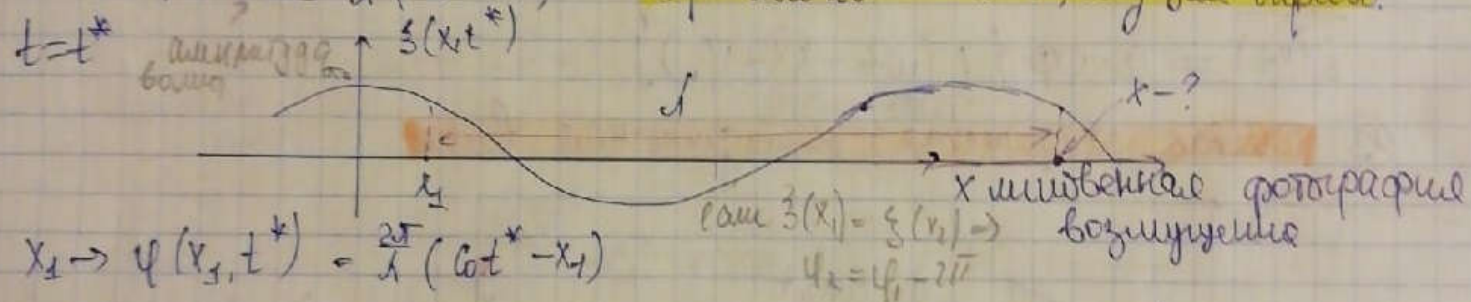
$$\varphi(x,t) = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot 2\pi(-1) = \frac{x-ct}{\lambda} \cdot 2\pi(-1)$$

↑ ↑
масштаб периодичности где удобство

интервал, содержащий 2π аргумента (приведен к радианам)

$$\varphi(x,t) = \frac{2\pi}{\lambda} (ct - x)$$

$$\zeta(x,t) = a \cos \frac{2\pi}{\lambda} (ct - x) \quad - \text{гармоническая волна, текущая вправо}$$



В какой точке x аргумент $\cos$ будет уменьшиться на 2π ?

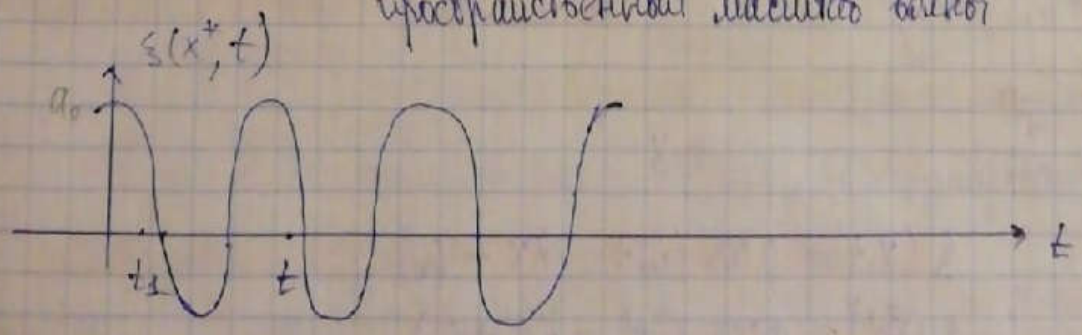
$$x > x_1 \quad \varphi(x, t^*) = \varphi(x_1, t^*) - 2\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} (ct^* - x) = \frac{2\pi}{\lambda} (ct^* - x_1) - 2\pi$$

$$x - x_1 = \lambda \Rightarrow \lambda - \text{длина волны}$$

то расстояние между двумя ближайшими точками, в которых возмущение принимает одно и то же значение

пространственный масштаб волны



$$t_2 > t_1 \quad \varphi(x^*, t_2) = \frac{2\pi}{T} (Tt_2 - x^*)$$

$$t_2 - t_1 = T \quad \varphi(x^*, t_2) = \varphi(x^*, t_1) + 2\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} (\omega t - x) = \frac{2\pi}{\lambda} (\omega t_1 - x^*) + 2\pi$$

$$t - t_1 = \frac{\lambda}{\omega} - \text{период осцилляций (набавили)}$$

$$T = \frac{1}{\omega} \quad [\omega] = \text{с}^{-1}$$

$$\nu = \frac{1}{T}$$

$$[v] = \Gamma_y = c^{-1} - \text{частота}$$

$$[\omega] = \text{рад/с}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} - \text{угловая частота}$$

$$\zeta(x, t) = a \cos(\omega t - kx) \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\lambda} \omega$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} = k - \text{волновое число}$$

$$[k] = \text{м}^{-1}$$

$$\omega = k c \quad ; \quad \omega = \frac{\omega}{k}$$

$$\zeta(x, t) = a \cos(\omega t - kx)$$

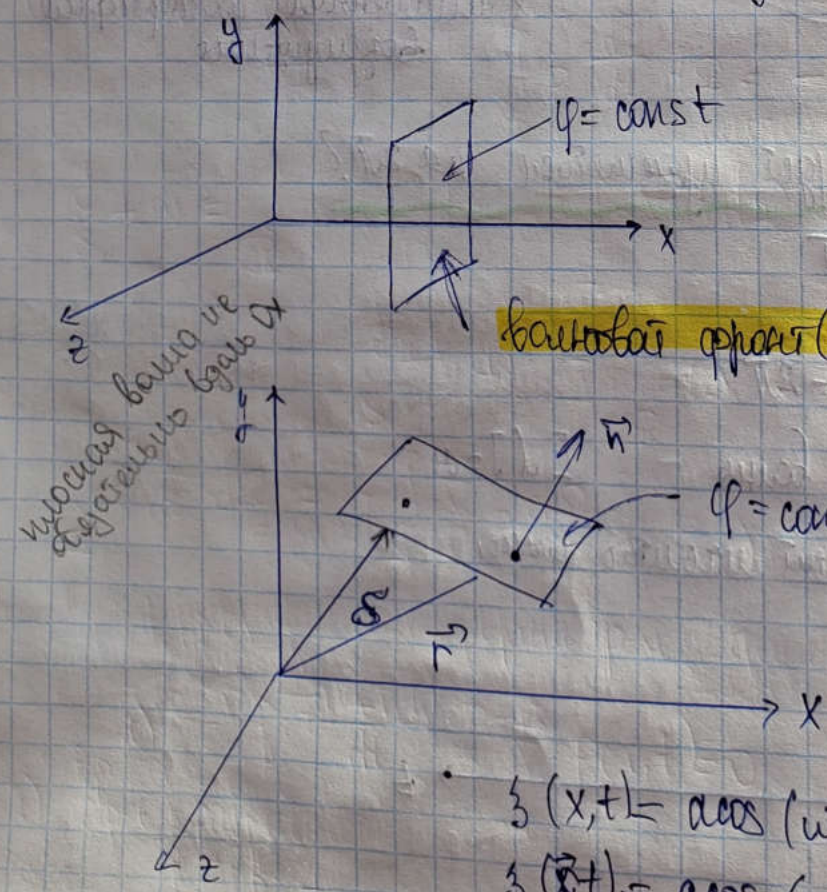
$$\zeta(x, t) = a \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$\zeta(x, t) = \text{Re} \{ a e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)} \}$$

амплитуда начальный фаз

$$\zeta(x, t) = a \cdot \exp \{ i(\omega t - kx + \varphi_0) \} - \text{плоская волна}$$

13. плоская, сферическая, цилиндрическая волны.



$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (\omega t - x)$$

волновой фронт (т.е. там, где $\varphi = \text{const}$)
 волновой фронт - поверхность, состоящая из точек, равной фазы в данный момент времени

r - кратчайшее расстояние от (0,0) до плоскости

$$r = (\vec{r}, \vec{n})$$

$$\zeta(x, t) = a \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$\zeta(\vec{r}, t) = a \cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

Угловая координата $= -k \delta = -k(\vec{n}, \vec{r}) = -\delta = (\vec{r}, \vec{n})$ - по формуле скал. пр. точки до пл. фр.

$$\xi(\vec{r}, t) = a \cos(\omega t - (\vec{k}\vec{r}) + \varphi_0)$$

$$\vec{k} = k \cdot \vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} - \text{волновой вектор}$$

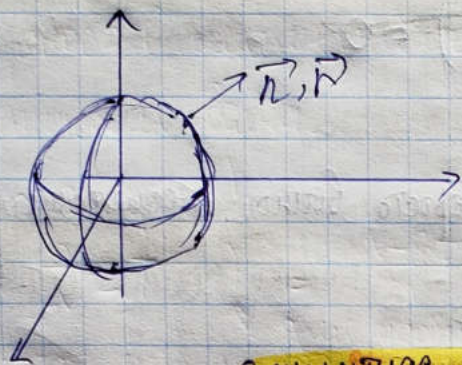
$$\xi(\vec{r}, t) = a e^{i(\omega t - (\vec{k}\vec{r}) + \varphi_0)}$$

- плоская волна в ПДСК. (гармонич.?)

Сферическая симметричная волна

$$\frac{\partial^2 \xi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - c^2 \Delta \xi(\vec{r}, t) = 0 - \text{волновое ур-е плоской волны в ур-е}$$

$$\frac{\partial^2 \xi(r, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \xi(r, t)}{\partial r}) = 0 - \text{волновой фронт - сфера}$$



$$\xi(r, t) = u(r, t) \cdot \frac{1}{r}$$

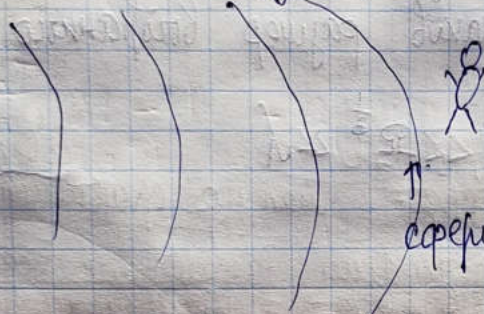
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0$$

$$\xi(r, t) = \frac{a}{r} e^{i(\omega t - kr + \varphi_0)}$$

амплитуда убывает с расстоянием

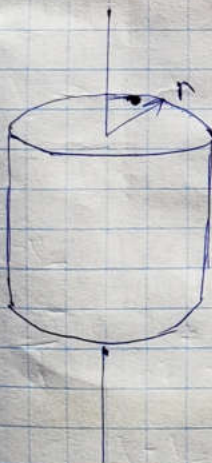


плоская волна



сферическая волна

и цилиндрическая волна



$$\frac{\partial^2 \xi(r, t)}{\partial t^2} - c^2 \cdot r \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \xi}{\partial r}) = 0$$

$$\xi(r, t) = \frac{a}{\sqrt{r}} e^{i(\omega t - kr + \varphi_0)}$$

- цилиндрическая волна

волновой фронт - цилиндр

1.4 Продольная и поперечная волна.

$\vec{\xi} \parallel \vec{k}$ - продольная (сжатие / расширение частиц)

$\vec{\xi} \perp \vec{k}$ - поперечная (струна, электромагнитная волны)

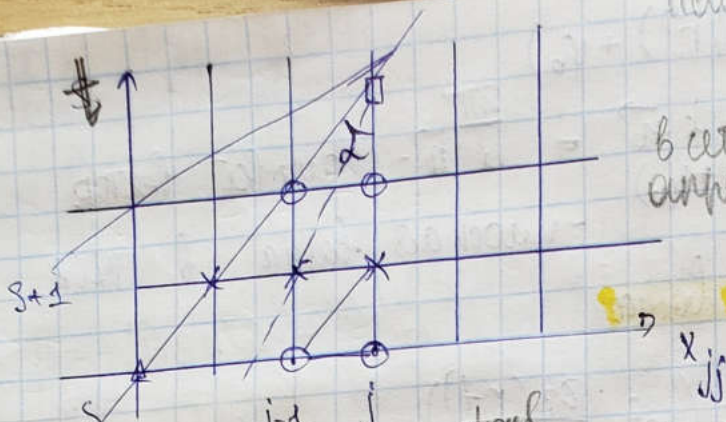
1.5 Интерференция условия устойчивости Куранта.

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

минимум волны/волна - это различные возмущения, которые передаются от одной части пространства к другой

$$\{x, t\} \rightarrow \{x_j = h \cdot j, t_s = \tau \cdot S\} - \text{переход к дискретной информации}$$

$$\zeta(x,t) \rightarrow \zeta_j^s$$



используем схему децентрализованно
 $\lg L = \frac{h}{\tau} = C$
 в сетке, возмущения $\delta \psi$ узлы
 определяются возмущениями в
 фазе и амплитуде
 что-то по численным методам

$$\frac{1}{\tau} (\zeta_j^{s+1} - \zeta_j^s) + C_0 \frac{1}{h} (\zeta_j^s - \zeta_{j-1}^s) = 0$$

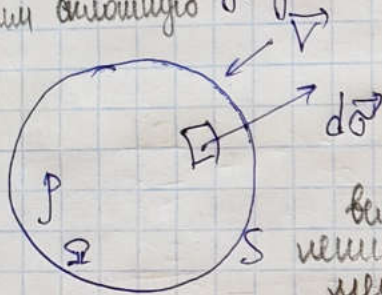
явная схема децентрализованно
 условия Куранта

устойчивое решение, если $C_0 \leq C_h \leftarrow \max \text{ скорость волны, обеспечив. на сетке}$
 $C_h = \frac{h}{\tau}$ - характеристика сетки
 Физ. интерпр.: $C_0 \leq \frac{h}{\tau}$

2) Звуковые волны

2.1 Схема гидродинамических уравнений.

Рассмотрим объемную среду.



$$R \ll \lambda \ll L$$

волны ко сравнению с радиусом
 мал по сравнению с длиной волны

1) Уравнение движения:

p-давление

$$\int_{\Omega} p \frac{d\vec{v}}{dt} d\Omega = - \oint_S p d\vec{S}$$

Рассмотрим объем как жидкое в баллоне
 изменение движения частиц
 создает давление (извне среды)

$$\oint_S p d\vec{S} = \int_{\Omega} \text{grad } p d\Omega = \int_{\Omega} \vec{\nabla} p d\Omega$$

$$\oint_S (p, d\vec{S}) = \int_{\Omega} (\vec{\nabla}, \vec{p}) d\Omega$$

количество движения в объеме (потом узнать изменение количества движения)

$$\int_{\Omega} p \frac{d\vec{v}}{dt} d\Omega = - \int_{\Omega} \vec{\nabla} p d\Omega$$

формула Гаусса

дифференциальная форма у-я движения

дифференцируем

$$1) \quad p \frac{d\vec{v}(r,t)}{dt} + \vec{\nabla} \cdot p(r,t) = 0$$

2) уравнение неразрывности

масса не меняется

$$\int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial t} d\Omega = - \oint_S p \vec{v} d\vec{S}$$

по поверхности

$$\frac{\text{масса}}{t} = \frac{kg}{s}$$

по ф-ле Остроградского $(\rho \vec{v}, d\vec{v})$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega} \vec{\nabla}(\rho, \vec{v}) d\Omega$$

у-е равновесия в дифференциальной форме закон сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{\nabla}, \rho \vec{v}) = 0$$

3) у-е состояния (связь между давлением, температурой и плотностью)

$$F(\rho, p, T) = 0$$

$$\varphi(\rho, p) = 0.$$

4) Закон сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \varepsilon \frac{p^2}{2} \right) = - (\vec{\nabla}, (\rho \vec{v} + \vec{\sigma}))$$

Граничные условия:

1. абсолютно жесткая граница (скорость смещения частиц = 0)

$$v_n = 0$$

2. абсолютно жесткая граница $p = 0$

2.2) приближения линейной акустики.

$p = p_0 + p'$ $p = p_0 + p'$ (равновесное + смещение)
 $v_0 = 0$ $p = p(\rho)$ у-е состояния

$\frac{p'}{p_0}, \frac{p'}{\rho_0} \ll 1 \sim \frac{v}{c_0}$ - малые возмущения

Исходя из этих условий совершим линеаризацию полученных у-й.

1) у-е движения в дифференциальной форме

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{\nabla} p = 0$$

$$(p_0 + p') \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \dots + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \right) + \vec{\nabla} (p_0 + p') = 0$$

локальное ускорение $\omega_{лок} \sim \frac{v}{T}$

конвективное ускорение $\omega_{кон} \sim \frac{1}{\lambda} \cdot v$

$\frac{\omega_{кон}}{\omega_{лок}} \sim \frac{v^2}{\lambda} : \frac{v}{T} = \left\{ \frac{v/\lambda}{v/T} = \frac{v}{a} = M \ll 1 (\max) \right\}$
 $\frac{v \cdot T}{\lambda} = \frac{a}{\lambda} \ll 1$

конвективным ускорением можно пренебречь (из-за того $\omega \ll 1$)

1) линеаризованное ур-е движение

почему именно это оставим

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} p' = 0$$

10.09.19г.

2) $\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 (\vec{\nabla}, \vec{v}) = 0$

разрешим

3) $\rho_0 + \rho' = \rho(p)$ - изменение давления. (адиабатический процесс)

$$\rho_0 + \rho' = \rho(p_0) + \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_0 p' + \dots$$

- изотерма для p

$$p' = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_0 \rho' \quad \text{- ур-е состояния.}$$

найдем волновое ур-е на основе линеар. ур-й гидродинамики 1)-3)

1) Действуем ∇ на 1)

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}, \vec{v}) + \Delta p' = 0$$

2) Берем произв. по времени в 2)

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}, \vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0$$

исключаем v и p'

3) $p' = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_0 \rho' = \omega^2 \rho'$ ур-е состояния

найдем волновое ур-е для плотности

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \omega^2 \Delta \rho' = 0$$

аналогично.

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \omega^2 \Delta p' = 0$$

Потенциал скорости:

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}, t)$$

наверное определяем

первое ур-е примет вид

$$\rho_0 \vec{\nabla} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\nabla} p' = 0$$

второе ур-е:

$$(*) \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \Delta \varphi = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial p'}{\partial t} = 0$$

в силу существования потенциала скорости.

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v = 0 \quad \text{т.к.} \quad \rho = \rho(p) \quad (*)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \left(-\rho_0 \Delta \psi \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \omega^2 \Delta \psi = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\rho_0 \Delta \psi$$

ω - фазовая скорость волны.

Скорость звука

Симметричность среды $\rho = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial p}{\partial p} \Big|_0$

β - симметричность среды

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho \beta}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{\rho \beta}$$

Чем меньше симметричность среды тем быстрее скорость звука и обратная пропорция

Скорость звука в:

стали: $c_{стали} \approx 7 \cdot 10^3 \text{ м/с}$

воде: $c_{вода} \approx 1,5 \cdot 10^3 \text{ м/с}$

воздухе: $\omega^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_0$

Считаем скорость звука в воздухе

$$\rho = \rho(p) - ?$$

Считаем, что процесс адиабатический (или термодинамический)

уравнение адиабаты

$$pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma$$

V - объем

$$M = \rho V = \text{const}$$

$$\rho(p) = \frac{p}{p_0} = \frac{\rho_0}{\rho_0^\gamma} p^\gamma$$

уменьшение объема

температура при $p = \text{const}$

$$C_p = C_v + R$$

температура при $p = \text{const}$

$i = 5$
мало степеней свободы

$$\gamma = \frac{i+2}{i}$$

$$C_v = i \frac{R}{2}$$

$$C_p = \frac{(i+2)R}{2} = \frac{7}{2}R$$

$$\omega^2 = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \frac{\partial}{\partial p} (p^\gamma) \Big|_0 = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \gamma p^{\gamma-1} \Big|_0 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}$$

$$\omega = \left(\frac{1,4 \cdot 10^5 \text{ Па}}{1,3 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3} \right)^{\frac{1}{2}} = 331 \text{ м/с}$$

$$\rho_0 = \frac{M}{V} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м/с}^2}{\text{м}^3}$$

$$\omega = 330 \text{ м/с}$$

Длина волны

$$\lambda = cT$$

$$T = \frac{1}{\nu} : [\nu] = \text{Гц}$$

$$L = \frac{c_0}{\nu}$$

$$\nu_{\text{мин}} = 20 \text{ Гц}$$

$$\nu_{\text{макс}} = 20 \text{ кГц}$$

$$L_{\text{макс}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{20 \frac{1}{\text{с}}} = 15 \text{ м.}$$

$$L_{\text{мин.}} = \frac{3 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^3} = 1,5 \text{ см}$$

Инфразвук $\nu < 15 \text{ Гц}$

Ультразвук $\nu > 20 \text{ кГц}$

Медицина: $\nu \approx 10^6 \text{ Гц} = 1 \text{ МГц.}$

$$\lambda_{\text{мед}} = \frac{c}{\nu} = 1,5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} = 1,5 \text{ мм}$$

Гиперзвук $\nu \sim 10^9 \text{ Гц}$

$$\lambda_{\text{гз}} = \frac{c_0}{\nu_{\text{гз}}} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^9} = 3 \cdot 10^{-1} \text{ м}$$



$$L_{\text{рас}} < \Omega^{\frac{1}{3}} < L$$

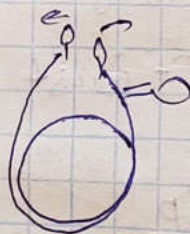
Плотность:

$N_L \sim 2,7 \cdot 10^{25} \frac{1}{\text{м}^3}$ - сколько частиц в кубическом м.

$$L_{\text{рас}} \sim \left(\frac{1}{N_L} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 5 \cdot 10^{-9} \text{ м.}$$

$$5 \cdot 10^{-9} \text{ м} < \Omega^{\frac{1}{3}} < \text{мкм} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

Упругая Пружина



$$l = 80 \text{ см}$$

$$\Delta t = \frac{l}{c_0} = \frac{80 \text{ см}}{300 \text{ м/с}} = 3 \cdot 10^{-1} \text{ с.}$$

2.3 Звуковые волны на границе раздела. Импеданс.

Волна вправо.

Рассмотрим гармоническую волну

гармоническую волну

$$\rho_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{- у-е движения}$$

$$v(x,t) = V \cdot e^{i(\omega t - kx)} \quad \text{- скорость}$$

$$p(x,t) = P e^{i(\omega t - kx)} \quad \text{- давление}$$

$$\rho_0 i \omega V e^{i(\omega t - kx)} - i k P e^{i(\omega t - kx)} = 0$$

$$P = \frac{\rho_0 \omega}{k} V = \rho_0 c_0 V = Z V$$

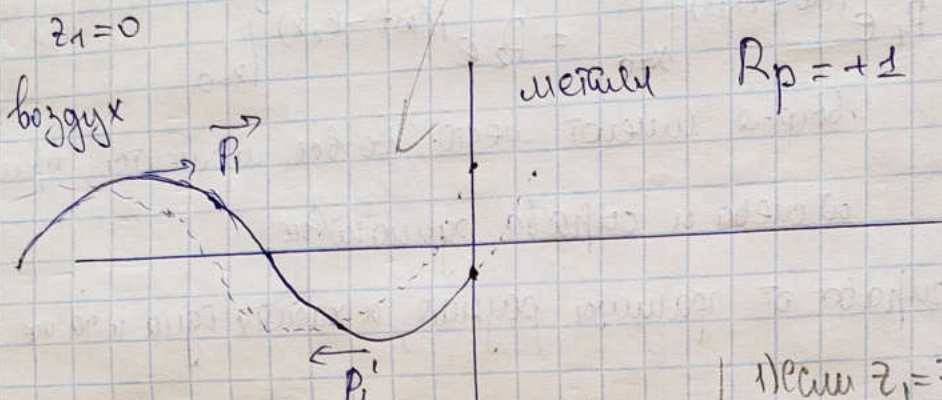
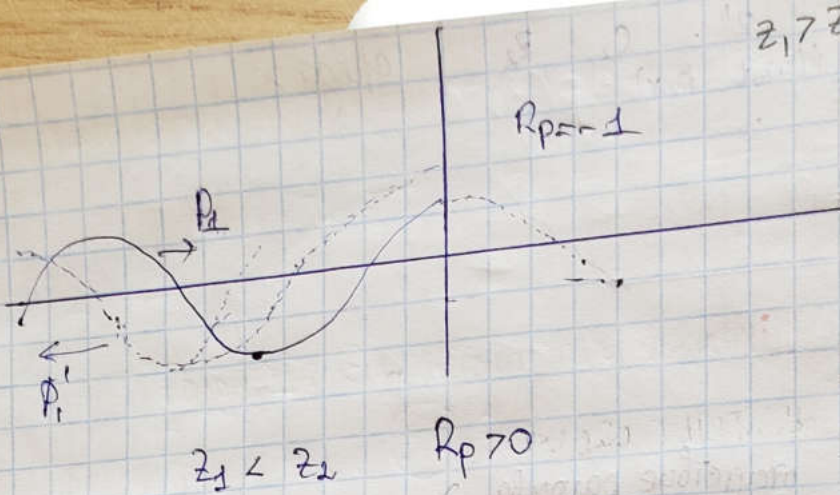
$Z = \rho_0 c_0$ - импеданс среды, звуковое сопротивление

V, P - амплитуды

а тогда z

первое ур.е
расшищено

$$z_2 = p_1 q \neq 0 \text{ means } | z_2 = p_2 q_2 = 0 \Rightarrow p_2 = 0 \text{ - bosqyx}$$



реверберация. - звук + эхо. процесс постепенного уменьшения интенсивности звука при его многократных отражениях

Если $z_1 = z_2$, то отражения нет
 2) $z_2 > z_1$, $R_p > 0$ (отражение в фазе)
 3) $z_2 < z_1$, то $R_p < 0$ (инверсия)

$z_1 v_1 - z_2 v_1 = z_2 v_2$
 $v_1 + v_1' = v_2$

$$P_1 = z_1 v_1$$

$$P_1' = -z_1 v_1'$$

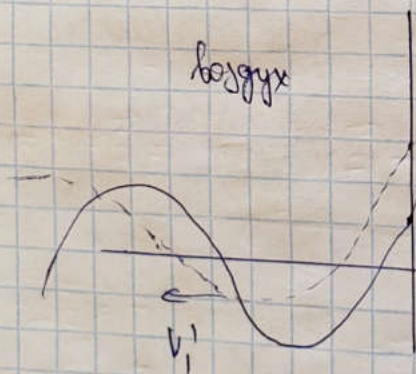
$$R_v = \frac{v_1'}{v_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$$

$$T_v = \frac{v_2}{v_1} = \frac{2z_1}{z_1 + z_2}$$

аналогично с P .

$$z_1 < z_2 < \infty \quad R_v = -1$$

$$R_p = +1$$



отражение света от более плотной среды происходит с потерей энергии, а от менее плотной без потерь

2.4 Поток и объемная плотность.

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} p = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 (\vec{\nabla}, \vec{v}) = 0 \end{cases}$$

получим:

$\times \vec{v}$ - ур-е движения в гравитационном поле

$\bullet \frac{1}{\rho_0} P$ - ур-е непрерывности.

$$\rho \left(\vec{v}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) + (\vec{v}, \vec{v} \rho) = 0$$

$$\left\{ \frac{1}{\rho} \rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho (\vec{v}, \vec{v}) = 0 \right.$$

распишем производную.

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} \rho$$

$$\rho = \rho_0 \cos^2 - \text{сжимаемость среды}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (v^2) = 2 \left(\vec{v}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (v^2) + (\vec{v}, \vec{v} \rho) &= 0 \\ \frac{1}{2} \rho \frac{\partial}{\partial t} (p^2) + \rho (\vec{v}, \vec{v}) &= 0 \end{aligned} \right.$$

суммируем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{\rho p^2}{2} \right) + (\vec{v}, (\rho \vec{v})) = 0 \quad (\text{закон сохранения энергии})$$

ω - объемная плотность энергии
 $\vec{S}$ - плотность потока энергии (т.е. div)

объемная плотность энергии

$$\omega = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{\rho p^2}{2} \quad [\omega] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$$

$$\omega = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{1}{c^2 \rho_0} (\rho_0 c v)^2 = \rho_0 v^2 = \rho p^2$$

$$\vec{S} = \rho \vec{v}$$

$$|\vec{S}| = \rho v$$

плотность потока энергии

$$\text{Вт} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{с}}$$

$$|p| = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}$$

$$[\vec{S}] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$$

$$= \frac{\rho p_0}{\rho_0^2 c} = \rho \frac{p}{\rho_0 c}$$

$$|\vec{S}| = \rho v = \rho_0 c v^2 = \rho_0 c \omega$$

энергия переносится со скоростью c в пространстве.

2.5 Интенсивность звука

$$I = \langle S_z \rangle_t$$

$$I = \langle \rho_0 c v^2 \rangle_t = \rho_0 c \frac{1}{T} \int_0^T v^2 \cos^2 \omega t \, dt$$

из усреднения (ре от e утратим т.е. уберем ωt)

$$I = \frac{\rho_0 c v^2}{2}$$

Попр. амплитуды $I_0 \approx 10^{-12} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$

$\nu = 1 - 3 \text{ кГц}$ - слышимый звук.

$$v_0 = \left(\frac{2 I_0}{\rho_0 c} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2 \cdot 10^{-12} \text{ Вт/м}^2}{1,3 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} \right)^{\frac{1}{2}} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ м/с}$$

$$z(t) = a_0 \cos \omega t$$

гар. ам.

$$a_0 = \frac{v}{\omega}$$

$$v(t) = -\frac{a_0 \omega}{v} \sin \omega t$$

$$\nu = 2 \cdot 10^3 \text{ Гц}$$

$$a_0 = 4 \cdot 10^{-12} \text{ м}$$

$$\lambda_{\text{звук}} \approx 10^{-7} \text{ м}$$

нет шума в ушах отклика у-р Максвелла - 10^{-14} м.



17.09.19.

Раздел II: Электромагнитные волны.

Уравнения Максвелла:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{— закон ЭМИ}$$

$\vec{B}$ — вектор магнитной индукции

$\vec{D}$ — вектор электрической индукции

$\vec{H}$ — магн. полев.

$\vec{E}$ — электр. полев.

ρ — объемная плотность зарядов или ρ заряд

Рассмотрим диэлектрик.

материальные уравнения

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

ϵ — диэлектрическая проницаемость среды

μ — магнитная проницаемость среды

Материальную среду характеризуем ϵ, μ .

При этом $\rho = 0, j = 0$ (нет свободных зарядов и токов).

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rot} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad \text{(преобразуем последнее ур-е)}$$

(преобр. линейные и независимые $\Rightarrow$)

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B})$$

(из 3-го ур-я Максвелла + мат. ур-я)

$$-\mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{H}) = -\mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \{ \text{мат. ур-е} \} = -\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} \quad \text{(мат. анализ)}$$

0 по предположению ($\rho = 0$ и второе ур-е Максвелла)

$$-\Delta \vec{E} = -\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{E} - \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\text{где } c = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0}}$$

— волновое уравнение

c — это скорость по размерности

c — скорость распространения ЭМ волны в среде с ϵ и μ .

скорость света в вакууме:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad \text{— скорость распр. в вакууме}$$

$\epsilon > 1, \mu > 1 \Rightarrow$ в среде скорость света меньше, чем в вакууме
 $c = \frac{c_0}{n}$, n - коэф. преломления, во сколько раз замедление в среде, чем в вакууме
 n - коэф. преломления.

3.2 $n = \sqrt{\epsilon \mu}$
 $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ подстановка получаем, что ω и $\vec{k}$ не зависят от материальной среды (из энергии фотона)
 $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ фаза волны
 $\vec{E}_0$ - амплитуда
 $\omega = 2\pi \nu$ - циклическая частота. $= \frac{2\pi}{T}$

$\vec{k}$ - волновой вектор, направлен $\perp$ волновому фронту в любой точке.
 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\lambda = cT$ - длина волны (из ϵ и μ)

$\epsilon = h\nu$ - энергия фотона
 λ уменьшается в разных средах и к тому же

как взаимноориентированы $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$?

$\text{div } \vec{D} = \rho = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{E} = 0$
 $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$
 $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$

$\frac{\partial E_x}{\partial x} = E_{0x} e^{i(\dots)} (-ik_x) = E_x (-ik_x)$

$\text{div } \vec{E} = -i(\vec{k}, \vec{E}) = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}$ (электромагнитная волна - поперечная)

только $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ получаем
 $-i(\vec{k}, \vec{E}) = -\mu_0 \vec{H} (i\omega)$ - из дисп. з.

$(\vec{k}, \vec{E}) = + \omega \mu_0 \vec{H} \Rightarrow \vec{E}, \vec{k}, \vec{H}$ образуют правую тройку.

все три вектора взаимно перпендикулярны $kE = \omega \mu_0 H$; $\frac{\omega}{c} = \mu_0 \epsilon_0 H$
 $E = c \mu_0 H = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} H$

3.3 как охарактеризовать энергию, которую переносит Э-м волна.

$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$ - вектор Умова - Пойнтинга

$[S] = \frac{B}{M} \cdot \frac{A \cdot m^2}{M} = \frac{B \cdot A}{M^2} = \frac{Dm}{C \cdot M^2} \Rightarrow$ поток энергии

величины векторов E и H
 z - индекс среды
 $z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$

какое кол-во энергии переносит волна за 1 с через площадку

$\text{div } \vec{S} = \text{div} [\vec{E}, \vec{H}] = \vec{H} \text{ rot } \vec{E} - \vec{E} \text{ rot } \vec{H} = \vec{H} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
 $= + \mu_0 \vec{H} \left(-\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) - \epsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \mu_0 \frac{\partial H^2}{\partial t} - \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu_0 H^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right)$

$$w = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H}^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{E^2}{z^2} + \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E^2$$

$$[w] = \frac{A \cdot C}{B \cdot M} \cdot \frac{B^2}{M} = \frac{B \cdot C}{M^2} = \frac{\frac{Dm \cdot C}{C \cdot M^3}}{M^3} = \frac{Dm}{M^3} = \frac{Dm}{M^3} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

w - объемная плотность энергии.

$$\text{div } \vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

$$\int_V \text{div } \vec{S} dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V w dV = 0$$

$$\oint_S \vec{S} d\vec{\sigma} + \frac{\partial}{\partial t} E = 0$$

формула Остроградского или Гаусса
E-наша энергия

поток энергии
через поверхность

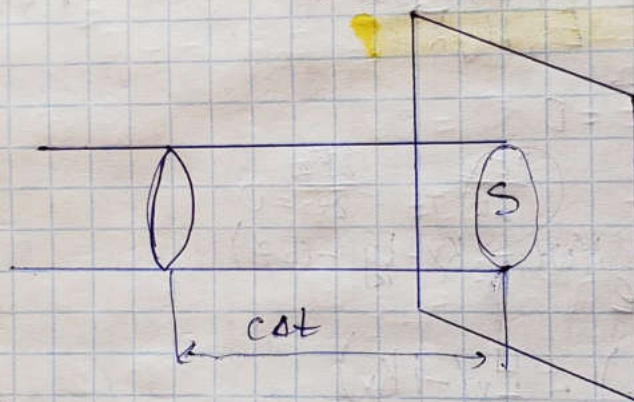
изменение
энергии

$$S = E \cdot H = \frac{E^2}{z} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 = \frac{c \epsilon_0 E^2}{1} = c w$$

Интенсивность волны

$$I = \langle S \rangle_t = c \epsilon_0 \langle E^2 \rangle_t = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$$

3.4 Давление электромагнитной волны.



онши Перегеда

$$E = h \nu$$

$$P = \frac{h}{\lambda}$$

- импульс

$$V = c \cdot S \cdot \Delta t$$

сколько штук фотонов содержится в волновом пакете

$$w \cdot V = E_0 = N \cdot h \cdot \nu$$

$$N = \frac{w \cdot V}{h \nu} = \frac{w \cdot c \cdot S \cdot \Delta t}{h \nu}$$

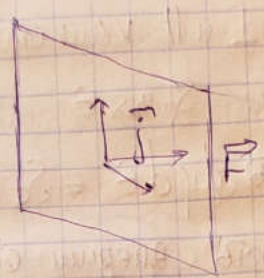
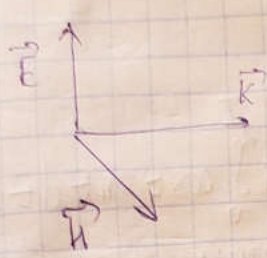
все фотоны полностью
поглощаются

$$\Delta p = N \cdot p = N \cdot \frac{h}{\lambda} = \frac{w \cdot c \cdot S \cdot \Delta t}{h \nu} \cdot \frac{h}{\lambda} = \left\{ \begin{array}{l} \lambda = c T = \\ = \frac{c}{\nu} \end{array} \right\} = \frac{w \cdot c \cdot S \cdot \Delta t}{\nu \cdot \frac{c}{\nu}} = w \cdot S \cdot \Delta t$$

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = w \cdot S$$

$$P = \frac{F}{S} = w = \frac{S}{c} - \text{давление}$$

$$P = \frac{S}{c} (1 + R)$$



$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

$d\vec{F} = I [d\vec{r}, \vec{B}]$ - сила шнтового давления.

Т.к. есть магнитное поле, то $d\vec{F} = I [d\vec{r}, \vec{B}]$ - магнитная сила светового давления (тоже самое, но с точки зрения ЭМ-поля).

3.6 Парниковый эффект.

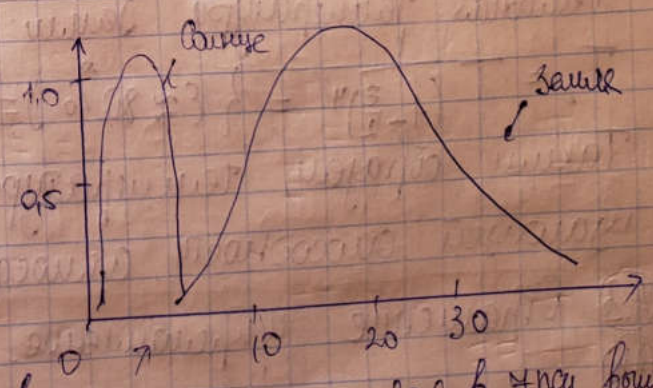
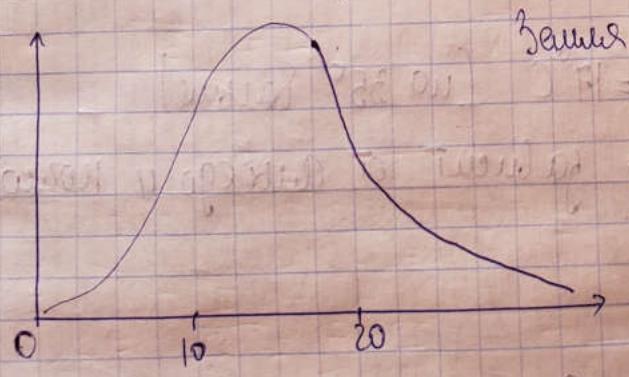
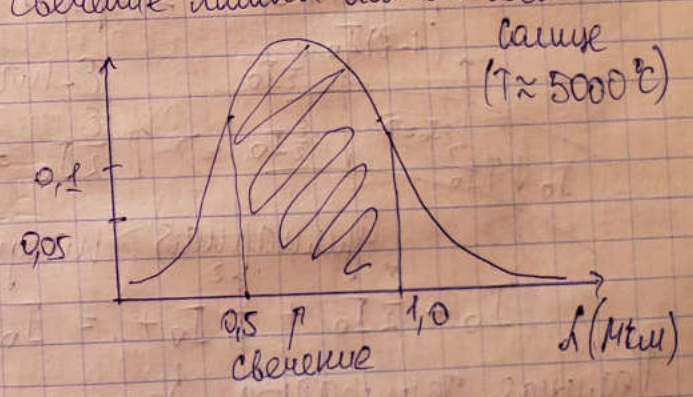
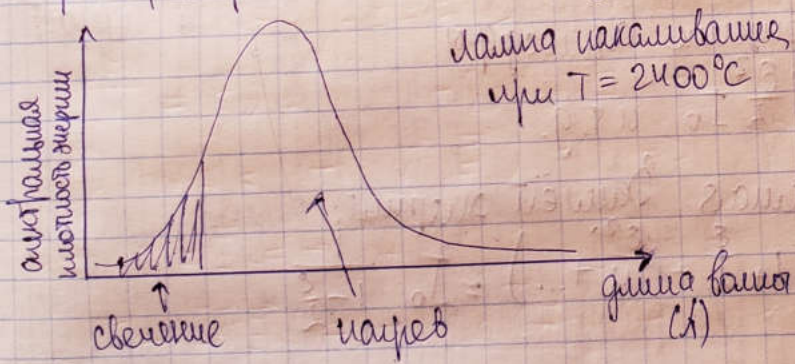
Солнечная постоянная (количество энергии от Солнца в верхних слоях атмосферы Земли): $S_c = 1,36 \frac{кВт}{м^2}$

Все нагретые тела излучают ЭМ-волны.

Формула Планка: $\omega = \frac{h \cdot \omega^3}{\pi^2 \cdot c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1}$ ($E = h\nu = h\omega$)

Важность формулы Планка в том, что она показывает, в каком спектре будет излучение (чем больше T, тем сильнее смещение к УФ).

Пример: раскалённое тело светится; свечение лампы накаливания.



Земля светит в ИК-диапазоне



Считаем, что поток от Солнца почти параллелен (телесный угол очень мал).

Рассмотрим S_c (вектор Пойнтинга) на $\perp$ и $\parallel$ компонент

Нас интересует нормальная компонента: $S_c \cos \theta$

$$P = \int S_c \cos \theta d\Omega = S_c \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos \theta R^2 \sin \theta d\varphi d\theta = S_c R^2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta$$

$\Rightarrow P = \pi R^2 S_c$ - полная мощность энергии от Солнца

$$I = \frac{\pi R^2 S_c}{4\pi R^2} = \frac{S_c}{4}$$
 - мощность на единицу площади.

Отражательная способность Земли - альбедо (A)

Модификация: $I_0 = \frac{S_c}{4} (1-A)$ (Для Земли $A=0.3$)

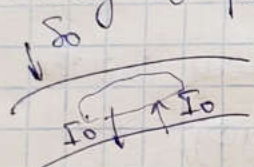
Формула Стефана-Больцмана: $I = \sigma T^4$

$$\sigma = 5.7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4} \text{ (постоянная С-Б)}$$

$\Rightarrow$ Зная интенсивность энергии, можно узнать температуру тела:

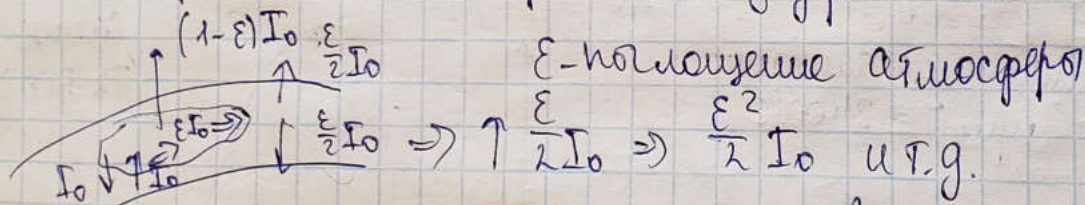
$$T = \left(\frac{S_c (1-A)}{4\sigma} \right)^{\frac{1}{4}} \approx 255^\circ \text{K} = -18^\circ \text{C} \text{ (расчетная T Земли)}$$

Почему в реальности это не так? Из-за атмосферы.



Атмосфера прозрачна для Солнца (видимый диапазон) но не для излучения Земли (ИК-диапазон)

Часть отраженной энергии она задерживается.



Суммарная падающая Землей энергия:

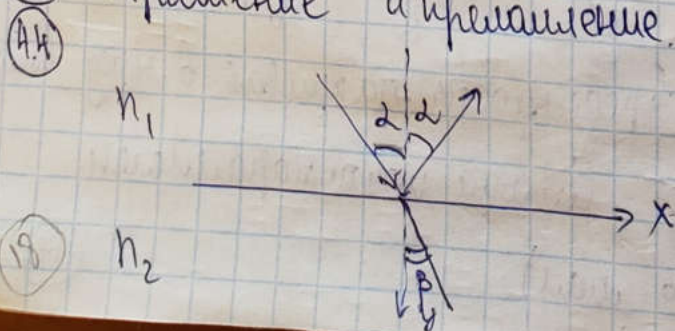
$$I_0 + \frac{\epsilon}{2} I_0 + \frac{\epsilon^2}{4} I_0 + \dots = I_0 \left(1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{4} + \dots \right) = I_0 \frac{1}{1 - \frac{\epsilon}{2}}$$

Реальная температура Земли:

$$T_3 = T \frac{1}{(1 - \frac{\epsilon}{2})^{\frac{1}{4}}} = \left\{ \epsilon \approx 80\% \right\} = 290^\circ \text{K} = 17^\circ \text{C} \text{ (на } 35^\circ \text{ больше)}$$

Таким образом, температура Земли зависит от альбедо и поглощательной способности атмосферы.

4.3 Отражение и преломление



Закон Снеллиуса: $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$

При $n_2 < n_1$, свет идет из более оптически плотной среды в менее плотную среду. Если увеличивать α , то угол β $\sin \alpha = \frac{n_2}{n_1}$ (критическое значение) называется полное внутреннее отражение. (ПВО)

Но всё не так просто:

(4.4)

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \Rightarrow \frac{c_0}{v_1} \sin \alpha = \frac{c_0}{v_2} \sin \beta \Rightarrow \frac{1}{v_1} \sin \alpha = \frac{1}{v_2} \sin \beta \quad | \cdot \omega$$

$$\frac{\omega}{v_1} \sin \alpha = \frac{\omega}{v_2} \sin \beta$$

$$n = \frac{c_0}{v_{\text{фазы}}}$$

$$k_{1x} = k_1 \sin \alpha = k_2 \sin \beta = k_{2x}$$

$k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$ (горизонтальная и тангенциальная компоненты)

$$k_{2y}^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{\omega^2}{c_1^2} \sin^2 \alpha \quad (\text{т.е. } k_{1x} = k_{2x}) = \omega^2 \left(\frac{1}{\left(\frac{c_0}{n_2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{c_0}{n_1}\right)^2} \sin^2 \alpha \right) =$$

$$= \frac{\omega^2}{c_0^2} (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha)$$

Если сделать больше критического, то:

$$\text{т.е. } n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha < 0$$

$$k_{2y} = -i \frac{\omega}{c_0} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \alpha - n_2^2}$$

Рассмотрим $E = E_0 e^{i(\omega t - (\vec{k}, \vec{r}))}$

Подставив в показатель экспоненты получим:

По y : $e^{-\frac{\omega}{c_0} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \alpha - n_2^2} \cdot y} = e^{-\frac{y}{d}} = e^{-\frac{y}{d}}$ (затухание волны)

$$d = \frac{c_0}{\omega \sqrt{n_1^2 \sin^2 \alpha - n_2^2}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{n_1^2 \sin^2 \alpha - n_2^2}}$$

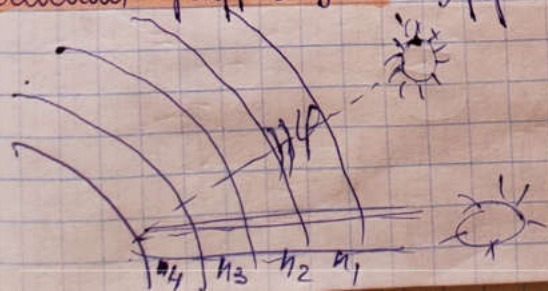
Итого: волна проникает в среду при полном внутреннем отражении на очень малые глубины (не проникает). На этом строится обратная спектроскопия.

На эффекте ПВО строится оптоволоконная передача.



(4.5)

Земная рефракция - эффект, когда видны объекты, находящиеся за линией горизонта. При приближении к поверхности Земли показатель преломления атмосферы увеличивается.



Угол полной рефракции: $\varphi \approx 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ рад}$

Возвращаясь в оболочку:

$$n_{\text{серд}} > n_{\text{об}} \Rightarrow \frac{c_0}{c} > \frac{c_0}{c_{\text{об}}} \Rightarrow c_{\text{об}} > c$$

В воде скорость звука зависит от температуры и солености. Из-за того, что одно работает на уменьшение, а другое на увеличение возникает эффект, аналогичный оболочке.

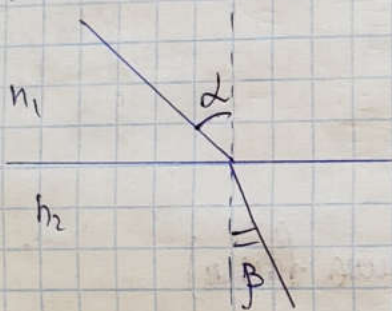
Радуга

Дисперсия - явление, связанное с тем, что ЭМ волны - волны разной длины распространяются в среде с разной скоростью.

$$c = c(\lambda)$$

$$n = \frac{c_0}{c} = n(\lambda)$$

Закон Ньютона:



$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$$

$$\sin \beta = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha$$

Суть: пускаем пучок белого света через более оптически плотную среду. На выходе он уже не разойдется по спектру.



В природе дисперсия наблюдается в радуге.

Почему радуга локализована в пространстве именно так?

Приближенный параметр капли - расстояние от оси сферической капли до точки падения луча (h)

Зная h легко считается угол выходного света, дающий первичную радугу - одно внутреннее отражение

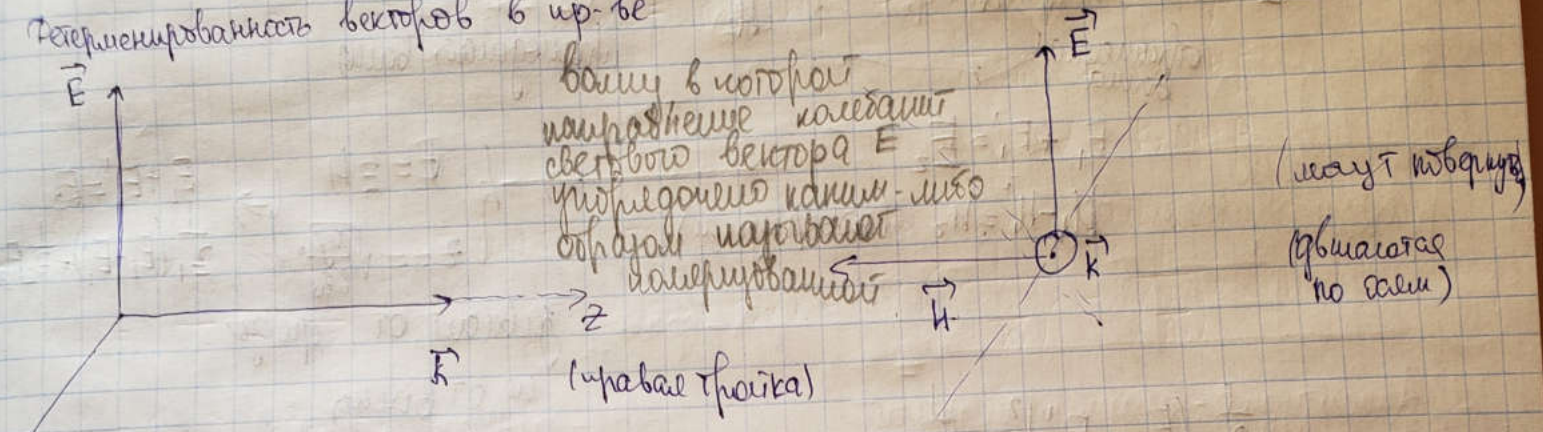
h: 0,85-0,86 (первичная) вторичная - 0,95 (вторичная) (интервал цветов)



Локализация радиус обусловлена субъективным наблюдателем.
 Пауль Александер - темная полость между первичной и вторичной радурой.
 Обусловлена тем, что в эту область не попадают ни ТВ, ни другие лучи.
 1.10.18г.

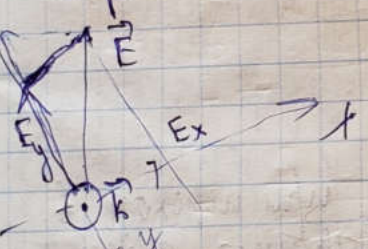
4.7 Поляризация харак-ет ориентированность векторов в пр-ве

Регулированность векторов в пр-ве



линейная поляризация

Будем рассматривать $\vec{E}$. Абсолютно аналогично по отношению к $\vec{H}$ (знаем направление $\vec{E} \Rightarrow$ знаем напр-е $\vec{H}$)



z - ось распространения, x, y - перпендикулярно

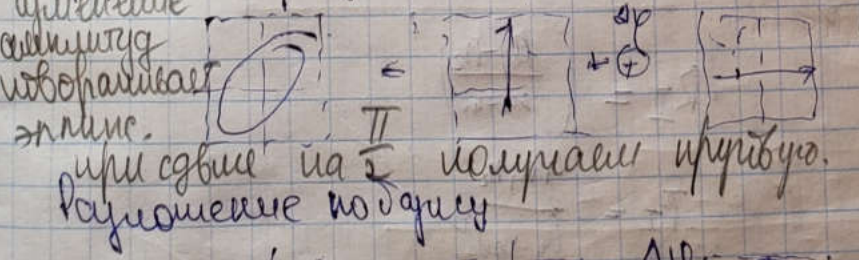
если при распространении волны $\vec{E}$ остается в одной и-ти которой принадлежит $\vec{k}$, то говорит о линейной поляризации волны.

линейная поляризация - $\vec{E}$ сводится вдоль прямой

любую линейную поляризацию можно представить как сумму

$$\begin{bmatrix} \nearrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rightarrow \end{bmatrix}$$

Круговая поляризация (правая и левая)

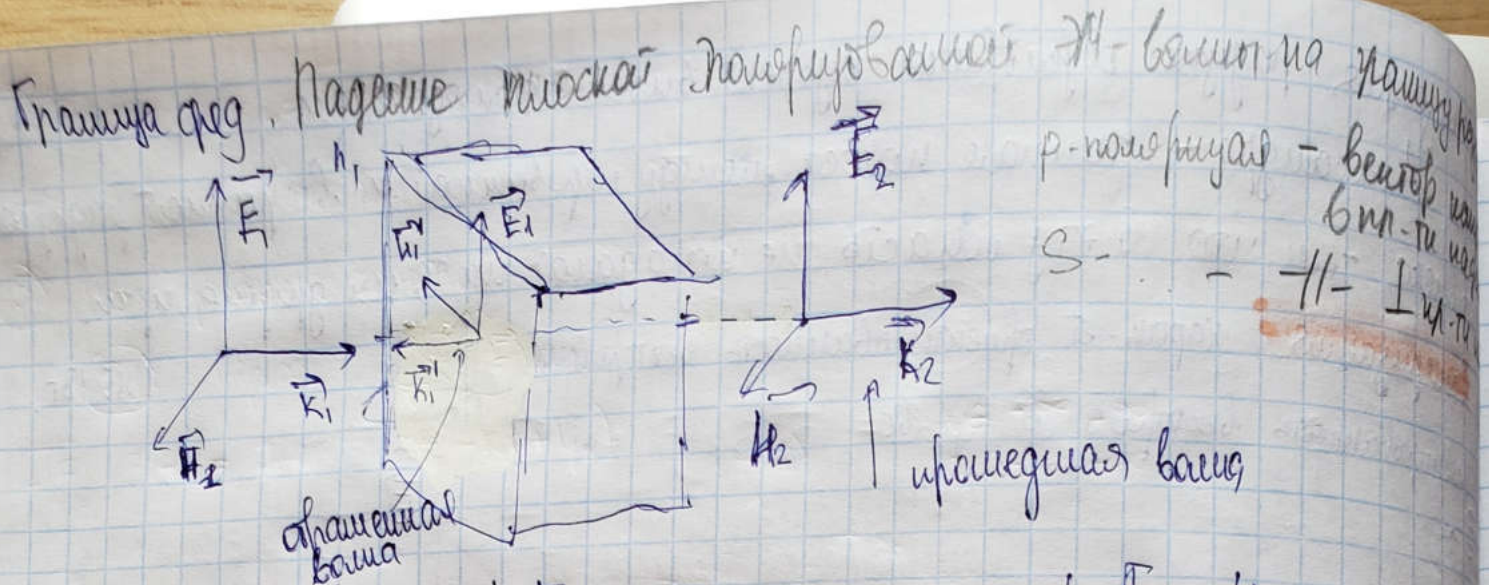


различия двух линейно поляризованных волн т.е. изменение конца вектора $\vec{E}$ в ил-ти перпендикуляр напр. распр. или совпадает ур-ем эллипса

$$\begin{bmatrix} \curvearrowright \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rightarrow \end{bmatrix}$$

ортогональный базис

линейную поляризацию можно представить как сумму двух круговых (2)



на границе раздела сред

$$E_1 + E_1' = E_2$$

$$H_1 - H_1' = H_2 \quad (\text{поверхности})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E = z H \\ z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \end{cases} \Rightarrow \frac{E_1 + E_1'}{z_1} = \frac{E_2}{z_2}$$

зависит от среды и от волны

$$\frac{1}{z_1} (E_1 - E_1')^2 = \frac{1}{z_2} E_2^2$$

Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{E_1'}{E_1} \\ T &= \frac{E_2}{E_1} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 1 + R &= T \\ -\frac{1}{z_1}(1 - R) &= \frac{1}{z_2}T \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} z_2(1 - R) &= z_1(1 + R) \\ z_2 - z_2 R &= z_1 + z_1 R \end{aligned}$$

отражения

$$R = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1}$$

коэф. прохождения

$$T = 1 + R = \frac{2z_2}{z_1 + z_2}$$

при переходе в другую среду меняется длина волны

$$\mu \approx 1$$

$$z \sim \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \sim \frac{1}{n}$$

$$n = \sqrt{\epsilon \mu}$$

$$R = \frac{\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1}}{\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

Если $R < 0$, то фаза сдвигается на π

$$T = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

$$I \sim |E|^2$$

$$R_I = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

$$T_I = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

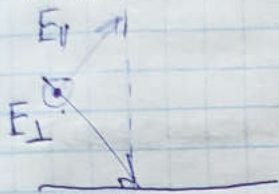
$$R + T = 1$$

Формулы Френеля

ФИЗИКА



человеческий глаз не чувствителен к поляризации.



$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$$

Формулы Френеля работают для волн с произвольной поляризацией

в Ф. Френеля достаточно рассмотреть

$$\frac{(E_{||})_{отр}}{(E_{||})_{пад}} = 0$$

самый распр. вид поляризации естественная поляризация хаоса

угол Брюстера: $\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$
 угол, при котором нет отраженной волны с параллельной поляризацией.
 $n_1 \sin \theta_B = n_2 \cos \theta_B$
 $n_2 \sin \theta_2 = n_1 \cos \theta_1$ (Земмис)
 $\sin \theta_2 = \cos \theta_1$

при падении под углом Брюстера отражение и преломление имеют 1-ую и 2-ую

Вращение плоскости поляризации

- разбегание волн на обыкновенную и необыкновенную

Изотропная среда. Построение тензора. Анизотропная среда

Оптическая ось

поляризация не зависит от направления
 анизотропия зависит

обыкновенная - как в изотропной среде
 необыкновенная - под углом отклонения и поворачивается

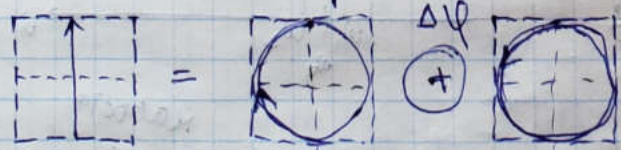
$\Delta \varphi_1 = \pi$
 $\Delta \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$
 анизотропной среды - единственное направление, вдоль которого свет распространяется без вращения

$$\Delta \varphi = kL = \frac{2\pi}{\lambda} L$$

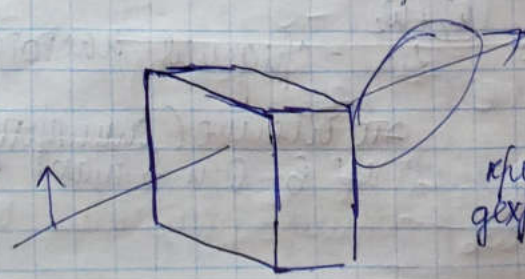
$$\Delta \varphi = \frac{\omega}{c} L (n_{\text{ос}} - n_{\text{неос}})$$

об. и необ. волны распространяются независимо
 взаимно перпендикулярно
 поле поляризации
 задав $\Delta \varphi = \frac{\pi}{2}$ можно получить круговую поляризацию

Оптическая активность - поворот плоскости поляризации



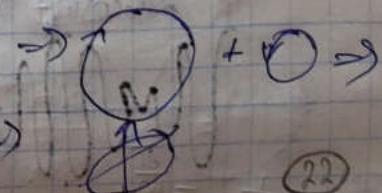
Эквивалент круговой поляризации - при прохождении светового луча через среду, в которой при $\Delta \varphi = \frac{\pi}{2}$



круговая поляризация

КД

люфт



Спектр.

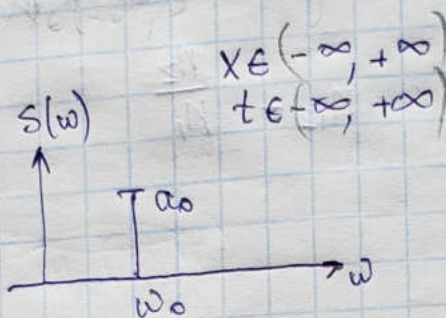
5 Модулирование сигналов

5.1 Передача информации.

$$z(t) = A_0 \cos(\omega_0 t - kx + \varphi_0)$$



переходим к
амплитуде
оси частот

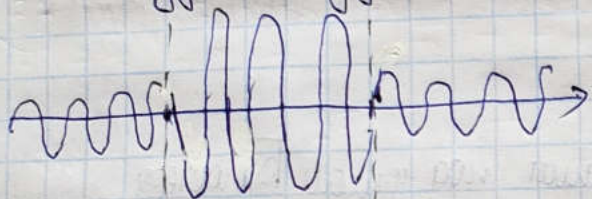


x-график

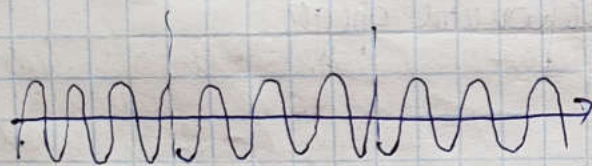
$$z(t) = (a(t)) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

модулирование сигнала частотой

1 Амплитудно-модулированный



2 Фаза-модулированный



5.2 Близкая АМ-модуляция

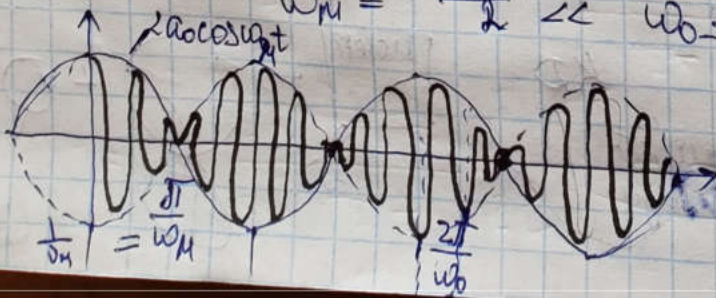
$$z(t) = A_0 \cos \omega_1 t + A_0 \cos \omega_2 t$$

$$\omega_1, \omega_2 \gg \omega_2 - \omega_1$$

$$z(t) = 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right)$$

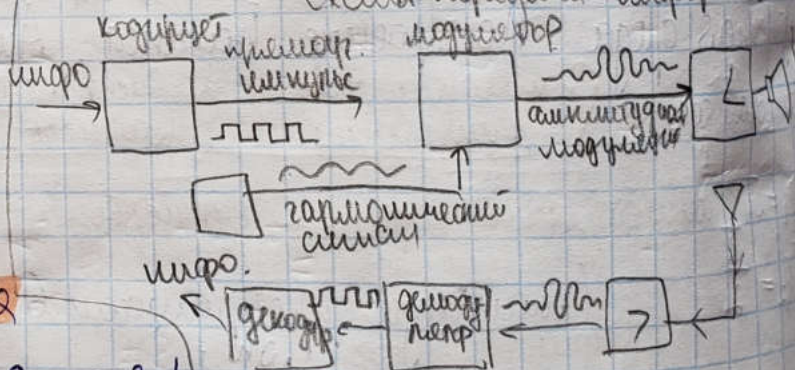
$$z(t) = 2A_0 \cos \omega_M t \cdot \cos \omega_0 t$$

$$\omega_M = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \ll \omega_0 = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$$



$$z(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$

Схема передачи информации



сообщение

несущая

модулированный сигнал

декодер

сообщение

сообщение

несущая

модулированный сигнал

декодер

сообщение

сообщение

несущая

модулированный сигнал

декодер

сообщение

сообщение

несущая

модулированный сигнал

декодер

сообщение

сообщение

несущая

модулированный сигнал

декодер

сообщение

сообщение

несущая

модулированный сигнал

декодер

сообщение

сообщение

несущая

модулированный сигнал

декодер

сообщение

сообщение

несущая

модулированный сигнал

декодер

сообщение

сообщение

несущая

модулированный сигнал

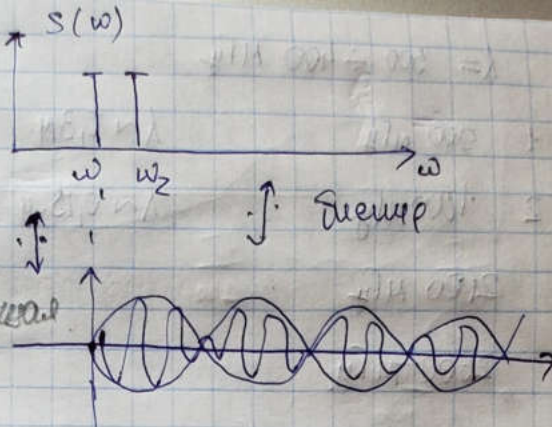
декодер

сообщение

$$z(t) = 2a_0 \cos \omega_m t \cos \omega_0 t$$

в спектрах
на чистоту

длина это
и есть амплитуда



Амплитудная модуляция

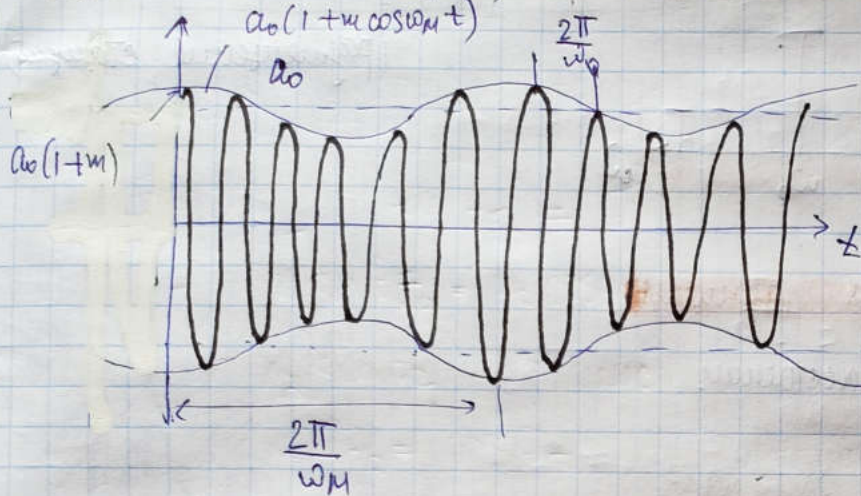
$$\omega_m \ll \omega_0$$

$$z(t) = a_0 (1 + m \cos \omega_m t) \cos \omega_0 t$$

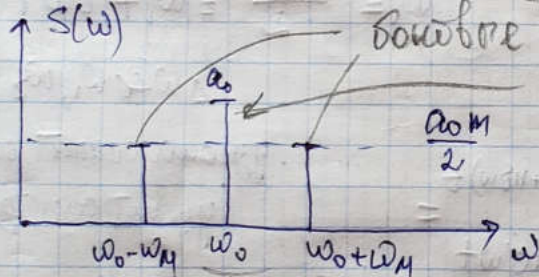
ω_0 - частота несущей

m - глубина модуляции

чистое - реальное поле



$$z(t) = a_0 \cos \omega_0 t + \frac{a_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \omega_m)t + \frac{a_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \omega_m)t$$



боковые гармониче-
ская частота

если $\omega_0 \downarrow$ то все
группа гармоник
едет влево!

или вправо.

Радиовещание

Длинные волны: $\lambda = 1.5 \text{ км} \div 600 \text{ м}$

$$\nu = 100 \text{ кГц}$$

Средние волны: $\lambda = 600 \text{ м} \div 100 \text{ м}$

$$\nu = 500 \text{ кГц} \div 3 \text{ МГц}$$

Короткие волны: $\lambda = 100 \div 10 \text{ м}$

$$\nu = 3 \text{ МГц} \div 15 \text{ МГц}$$

$$\lambda = c \cdot T = c \cdot \nu^{-1}$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

АМ-модуляция

(отражаются от ионосферы и
можно слышать радио
дальних стран).

Используется амплитудная модуляция.

Ультра-короткие волны: $\lambda = 3 \div 4 \text{ м}$; $\nu = 100 \text{ МГц} \div 40 \text{ МГц}$

$$90.3 \text{ МГц} \sim 90.3 \text{ МГц}$$

стандарт

DVB

$$\lambda = 500 \div 400 \text{ МГц}$$

GSM

$$1 \quad 900 \text{ МГц}$$

$$\lambda \sim 0,3 \text{ м}$$

$$2 \quad 1800 \text{ МГц}$$

$$\lambda \sim 0,15 \text{ м}$$

FM - частотная модуляция

UMTS

$$2100 \text{ МГц}$$

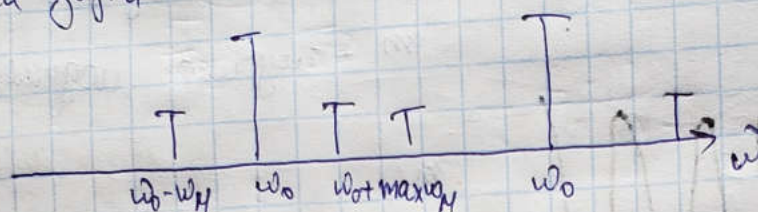
LTE

$$2600 \text{ МГц}$$

Почему можем передать больше информации используя высокие частоты

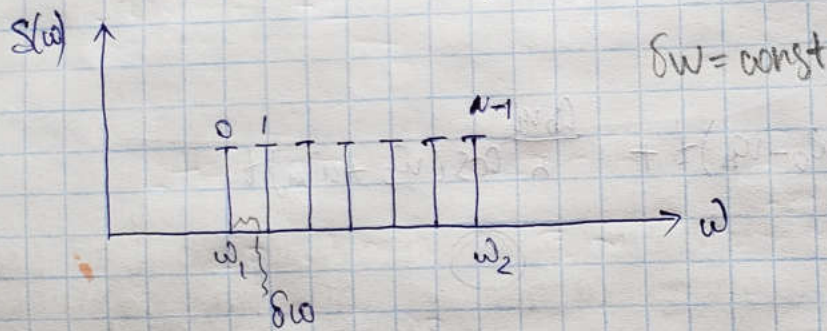
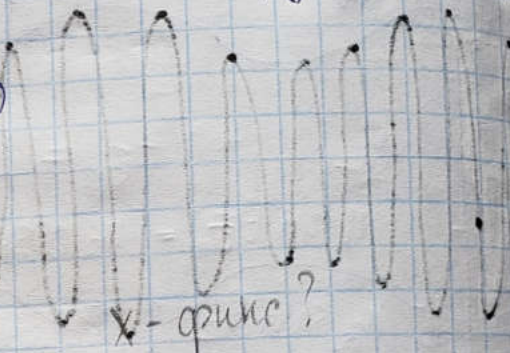
Передача звука: $\dots \max \nu_{\text{м}} = 20 \cdot 10^3 \text{ Гц}$ (ухо)

АМ



(различение сигналов)

5.3 Суперпозиция эквидистантных гармоник
на основе расстановки



$$\omega_2 - \omega_1 = \Delta \omega = \delta \omega \cdot (N-1)$$

$$\omega_0 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \omega_1 + \delta \omega \left(\frac{N-1}{2} \right)$$

frequency

$$\Delta \omega \ll \omega_1, \omega_2$$

узкополосный сигнал
(узкий спектр)

$$z(t) = a_0 \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega_1 + n\delta\omega)t = a_0 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(\omega_1 + n\delta\omega)t} =$$

= сумма членов как прогрессии

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\omega_1 t + i n \delta \omega t} = e^{i\omega_1 t} \sum_{n=0}^{N-1} q^n = e^{i\omega_1 t} \frac{q^N - 1}{q - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(t) = a_0 \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega_1 t} \cdot \frac{e^{i\delta\omega N t} - 1}{e^{i\delta\omega t} - 1} \right\}$$

$$\frac{e^{i\frac{\delta\omega N}{2}t} (e^{i\frac{\delta\omega N}{2}t} - e^{-i\frac{\delta\omega N}{2}t})}{e^{i\frac{\delta\omega}{2}t} (e^{i\frac{\delta\omega}{2}t} - e^{-i\frac{\delta\omega}{2}t})}$$

это сумма

$$z(t) = a_0 \frac{\sin \frac{N\delta\omega}{2}t}{\sin \frac{\delta\omega}{2}t} \operatorname{Re} e^{i(\omega_1 + \frac{\delta\omega}{2}(N-1))t}$$

$$z(t) = A(t) \cos \omega_0 t$$

$$A(t) = A_0$$

$$\frac{\sin \frac{N \Delta \omega}{2} t}{\sin \frac{\Delta \omega}{2} t}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\sin \frac{\Delta \omega}{2} t$$

$$T_A \approx \frac{2\pi}{\Delta \omega}$$

$$\Delta \omega \ll \omega_0$$

$$T_A \gg T_0$$

уменьшение амплитуды A на n -м периоде осциллирующего сигнала

$$\frac{\partial A}{\partial t} T_0 \ll A \quad (\text{медленно меняется})$$

$$\frac{\Delta \omega}{2} t = \pi S, \quad S = 0, 1, 2, \dots$$

$$t_S = \frac{2\pi S}{\Delta \omega}$$

в эти моменты считать y и y изменяется

$$A(t_S) = N A_0 = A(0)$$

Максимум $A(t)$ имеет

(правильно считать)

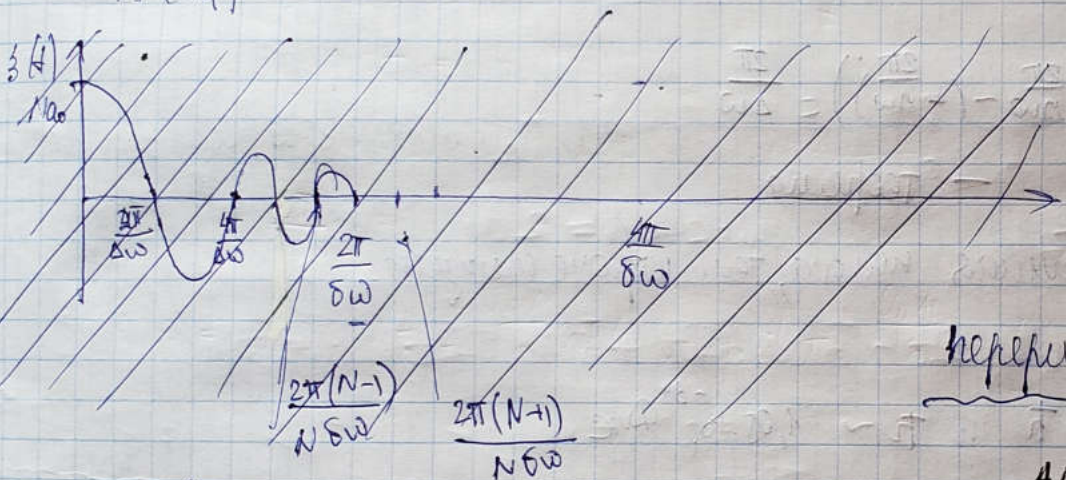
$$N \frac{\Delta \omega}{2} t = \pi q$$

$$q = 1, 2, \dots, N-1, N+1, N+2 \quad (q \neq S)$$

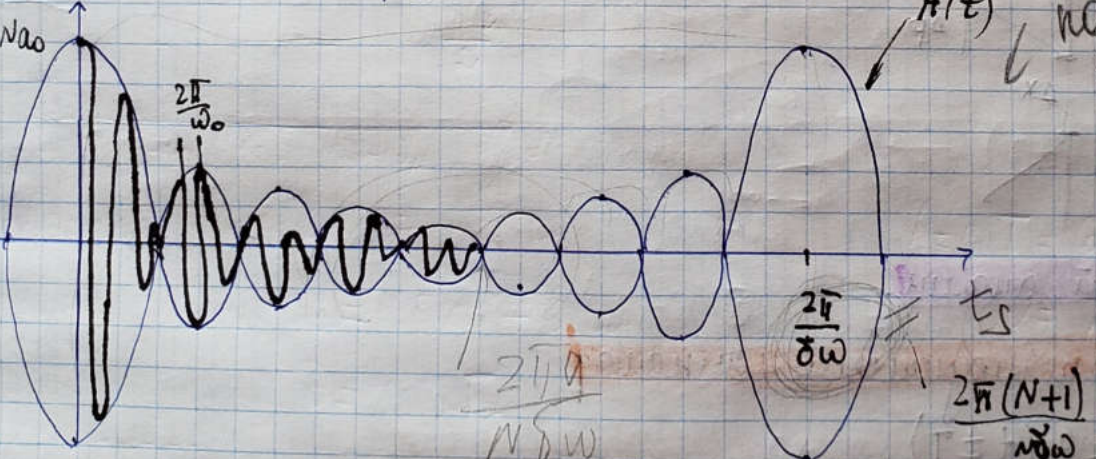
тогда $\Delta \omega$ не осциллирует

$$t_q = \frac{2\pi}{N \Delta \omega} q \leq t_S \quad N \gg 1 \quad (\text{исчислять } t_0)$$

$$A(t_q) = 0$$



перерисовать



покрытие
много графиков

Пусть $N \rightarrow \infty$ и $\Delta \omega \rightarrow 0$

так, что $\Delta \omega = \text{const}$

$$A(t) = A_0 \frac{\sin \frac{\Delta \omega}{2} t}{\frac{\Delta \omega}{2} t}$$

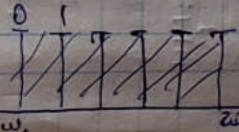
$$\lim \sin \frac{N \Delta \omega}{2} t$$

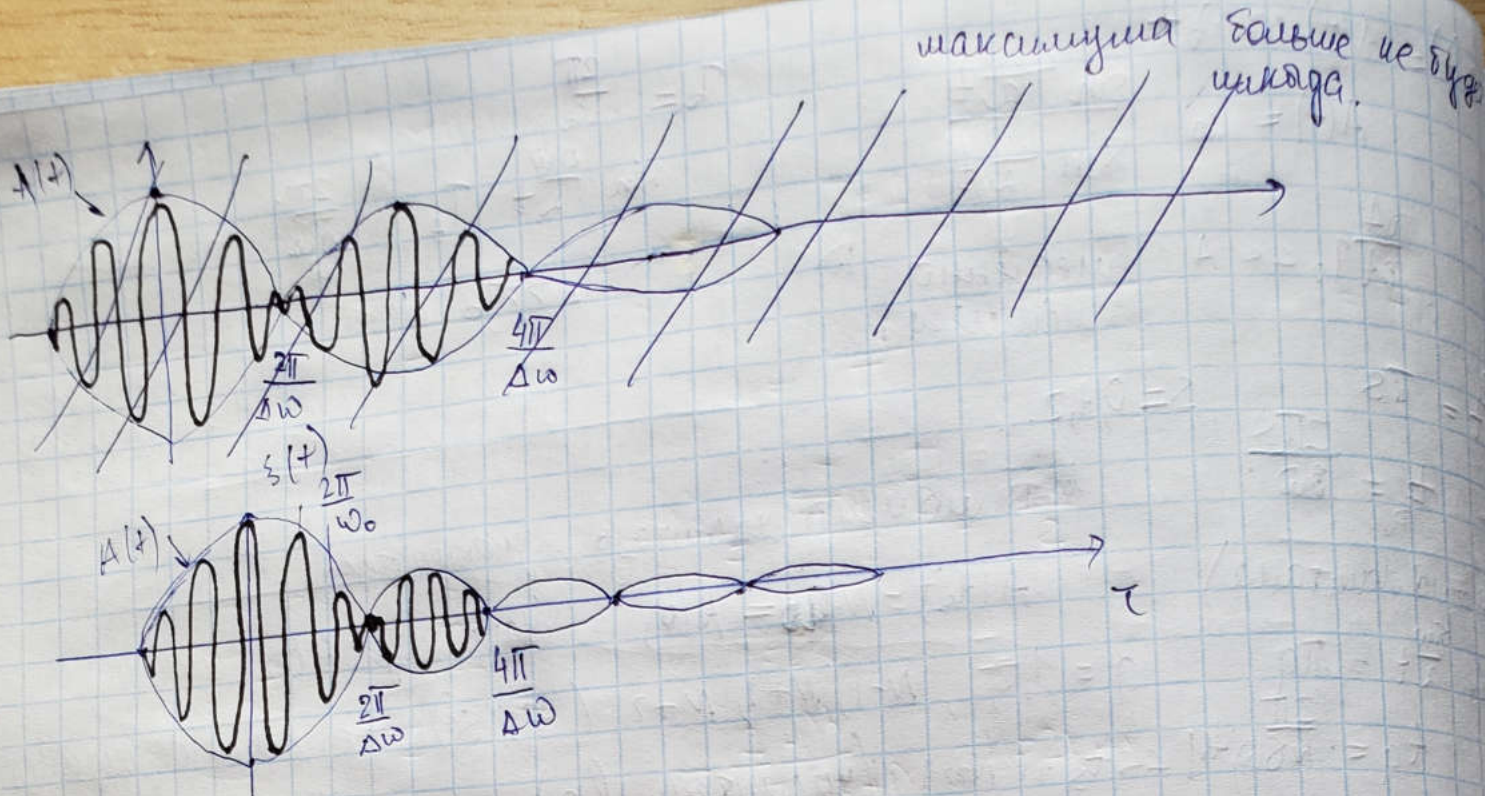
$$\lim N \sin \frac{\Delta \omega}{2} t$$

параметры
частоты

$$A(t) = A_0 \text{sinc} \frac{\Delta \omega}{2} t$$

$$\frac{\Delta \omega}{2} t = \pi h$$





5.4 Теорема о ширине частотной полосы

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

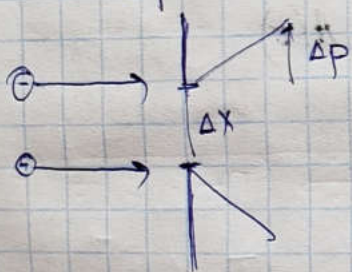
$$\Delta t = \frac{1}{2}(t_+ - t_-) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\Delta\omega} - \left(-\frac{2\pi}{\Delta\omega}\right)\right) = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

$$\Delta t \cdot \Delta\omega = 2\pi \quad \text{— теорема}$$

Чем шире спектральная полоса, тем короче импульс.

$$\Delta t \Delta\omega \geq 2\pi$$

$$\Delta p \cdot \Delta x \sim \hbar \quad \hbar \sim 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$$



6 Спектральный анализ

6.1 Спектр периодического сигнала

$$z(t) = z(t \pm T)$$

может быть представлена как

$$z(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} z(t) \cos \omega_n t dt$$

$$\omega_n = \Omega_n \quad \Omega_n = \frac{2\pi}{T}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} z(t) \sin \omega_n t dt$$

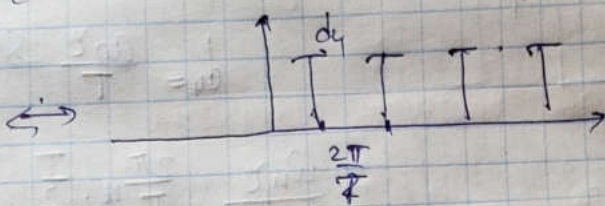
на оси времени

$$\hat{z}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i\omega_n t}$$

$$d_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \hat{z}(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

на оси частот

$$\hat{z}(t) = \hat{z}(t \pm T) \leftrightarrow \{ d_n \quad n = -\infty \dots \infty \}$$



вопрос?

Периодический сигнал имеет дискретный спектр.

$$e^{i\omega_n t} = \cos \omega_n t + i \sin \omega_n t$$

$$\cos \omega_n t = \frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2}$$

$$a_n = d_n + d_{-n}$$

$$b_n = i(d_n - d_{-n})$$

Если $\hat{z}(t)$ - вещественная, то

$$d_n = d_{-n}^*$$

$$a_n = 2 \operatorname{Re} d_n$$

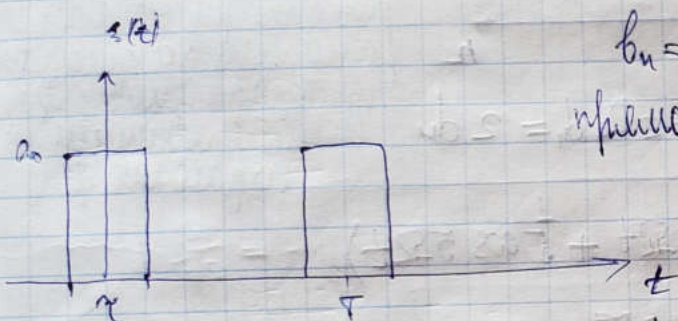
$$b_n = -2 \operatorname{Im} d_n$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \delta(\omega - \omega_n)$$

спектр

d_n - на спектре.

матричный импульс.



$$\hat{z}(t) = \begin{cases} a, & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

$$t \in [0, T]$$

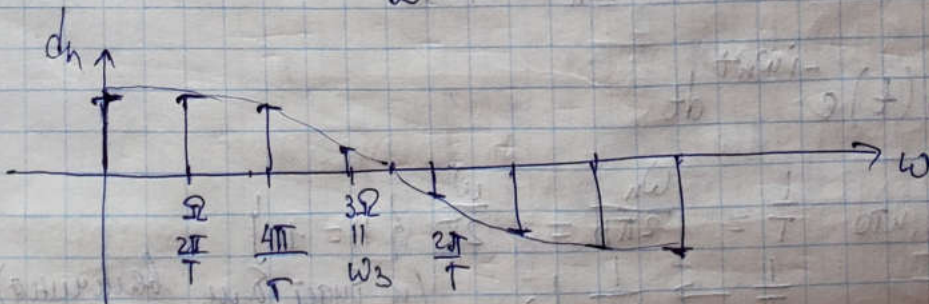
$$d_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \hat{z}(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} a_0 e^{-i\omega_n t} dt = \frac{a_0}{T} \frac{1}{(-i\omega_n)} \left(e^{-i\omega_n \frac{\tau}{2}} - e^{i\omega_n \frac{\tau}{2}} \right) = \frac{a_0 \tau}{T} \frac{\sin \frac{\omega_n \tau}{2}}{\frac{\omega_n \tau}{2}}$$

$$d_n = \frac{a_0}{T \omega_n} 2 \sin \frac{\omega_n \tau}{2}$$

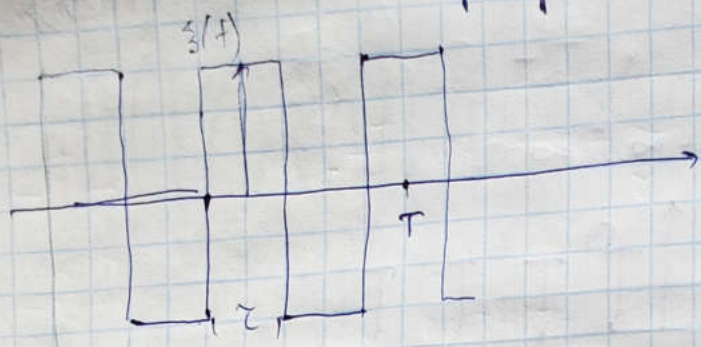
$$d_n = \frac{a_0 \tau}{T} \frac{\sin \frac{\omega_n \tau}{2}}{\frac{\omega_n \tau}{2}} = \frac{a_0 \tau}{T} \operatorname{sinc} \frac{\omega_n \tau}{2}$$



$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

спектр
периодического
сигнала

Формирование сигнала



$$T = 2 \tau$$

$$I_{ch} = \frac{a_0^2}{T} \sin \frac{\omega_n t}{2}$$

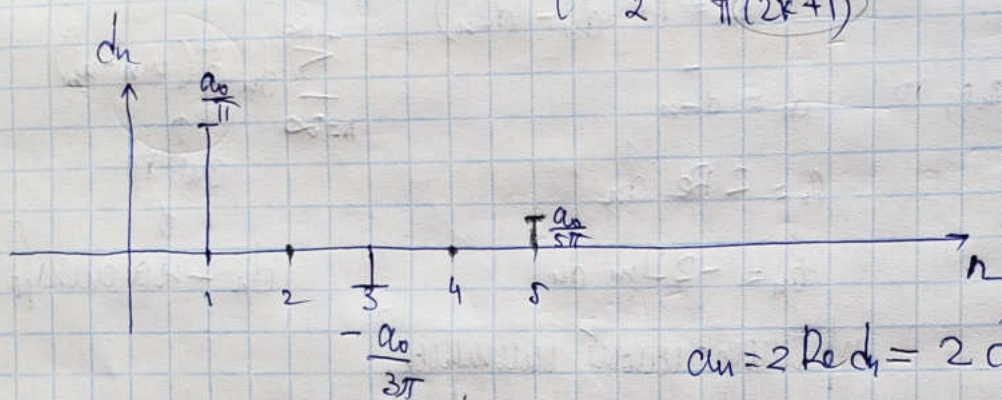
$$\omega_H = \frac{2\pi}{Th}$$

$$d_n = \frac{a_0}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{\frac{\pi n}{2}}$$

$$\frac{\omega_n r}{2} = \frac{\frac{2\pi}{T} n \cdot \frac{I}{2}}{2} = \frac{\sigma_n}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0, n=2k \\ \frac{a_0}{2} \cdot \frac{2(-1)^k}{\pi(2k+1)} \end{array} \right.$$

$$n = 2k + 1$$



$$c_m = 2 R e d_f = 2 d_m$$

$$z(t) = \frac{2a_0}{\pi} \left(1 \cos \Omega t - \frac{1}{3} \cos 3\Omega t + \frac{1}{5} \cos 5\Omega t \right)$$

$$\xi(t) = \xi(t \pm T) \iff \begin{cases} d\omega \\ \xi(\omega) = \sum_{n=-\infty, +\infty} \delta(\omega - \omega_n) d\omega \end{cases}$$

$$\zeta(\tau) = \zeta(t \pm \tau) \Leftrightarrow \sum_{\substack{\omega = -\infty \\ \omega_n \sim \Delta\omega}}^{\infty} \delta(\omega - \omega_n) d\omega$$

$$S(\omega) = \int_{\omega_1 + 2\pi}^{\omega} \delta(\omega - \omega_n) d\omega \cdot S(\omega)$$

(дискретный сигнал)

6.2) Спектр одиночного импульса. Интеграл Фурье.

$$z(t \pm T) = z(t)$$

$$z(t \pm \frac{0}{T}) = z(t)$$

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{i\omega_n t}$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \zeta(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

Нужно $T \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi n} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \left\{ n=1 \right\}$$

$$\frac{1}{T} \rightarrow \frac{1}{2\pi} d\omega \quad (\omega \text{ Sygter } \delta)$$

(и будет б.м. величина)

Осуществление Губбса-Вассона
имеет смысл, который аб-
ис-непр от-ел, и имеет
разрешение 1-го рода, который
родам от-ел, в силу его
медитации от-ел
разрешения некоего характера
и имеет характерный для него
свой характер осуществления
внутри разрыва.

Восстановление сигнала
по спектру выходящего
с помощью дискретного
преобразования Фурье
с применением
гармоник.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\omega$$

$$\omega_n \rightarrow \omega$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt'}_{S(\omega)}$$

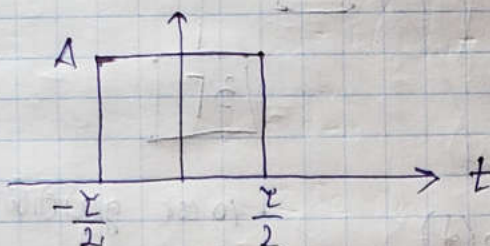
функция ограничена
имеет
конечное число
разрывов)

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < A$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt'$$

преобразование
Фурье

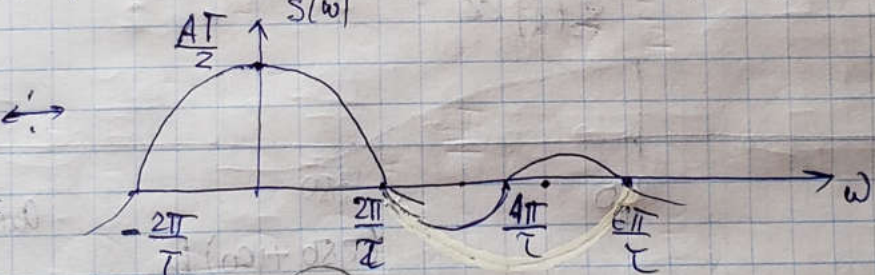
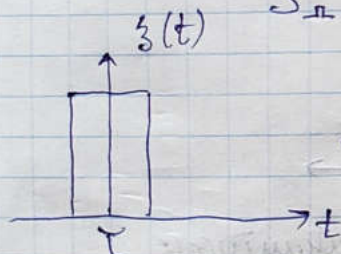


$$f(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{-i\omega 2\pi} \cdot A (e^{-i\omega \tau/2} - e^{i\omega \tau/2}) = \frac{A}{\pi \omega} \sin \frac{\omega \tau}{2} =$$

$$= \frac{A \tau}{\pi \frac{\omega \tau}{2}} \sin \frac{\omega \tau}{2}$$

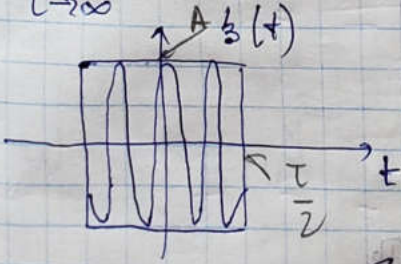
$$S_{\tau}(\omega) = \frac{A \tau}{2\pi} \text{sinc} \frac{\omega \tau}{2} \quad \text{— спектр прямоугольного импульса}$$



$$\tau \rightarrow \infty \quad S(\omega) = A \delta(\omega) \quad \text{Ф. Ф. Радона}$$

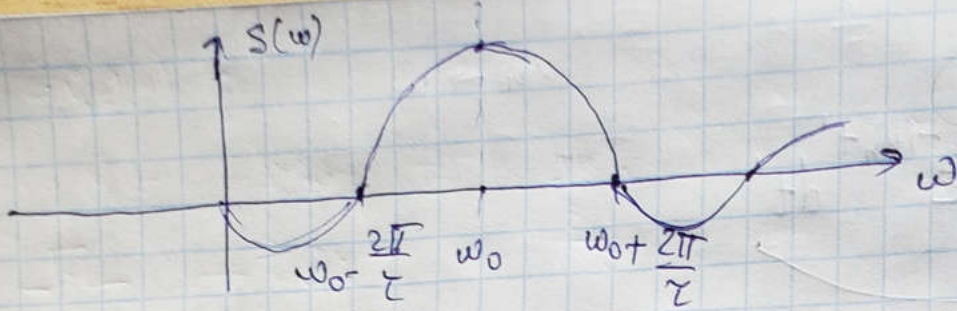
$$\tau \rightarrow 0 \quad S(\omega) = \text{const}$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\frac{\tau}{2} \text{sinc} \frac{\omega \tau}{2} \right) = \delta(\omega)$$



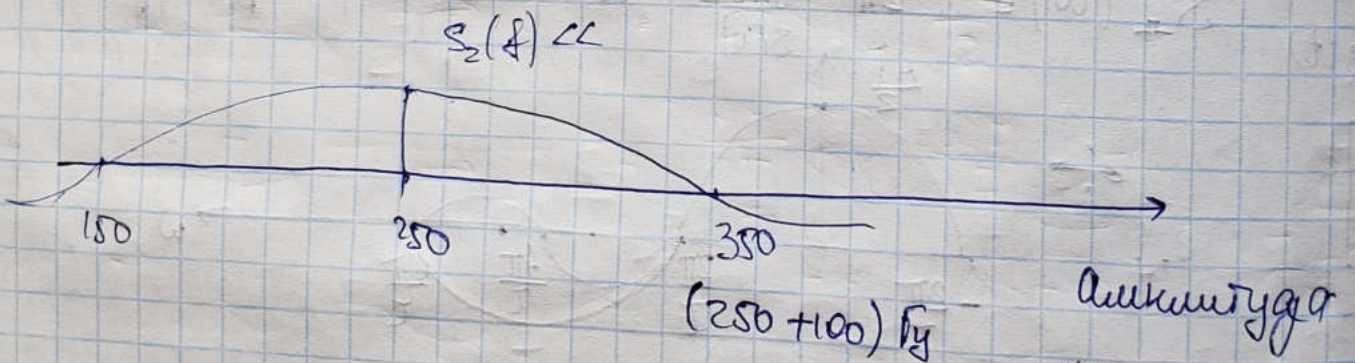
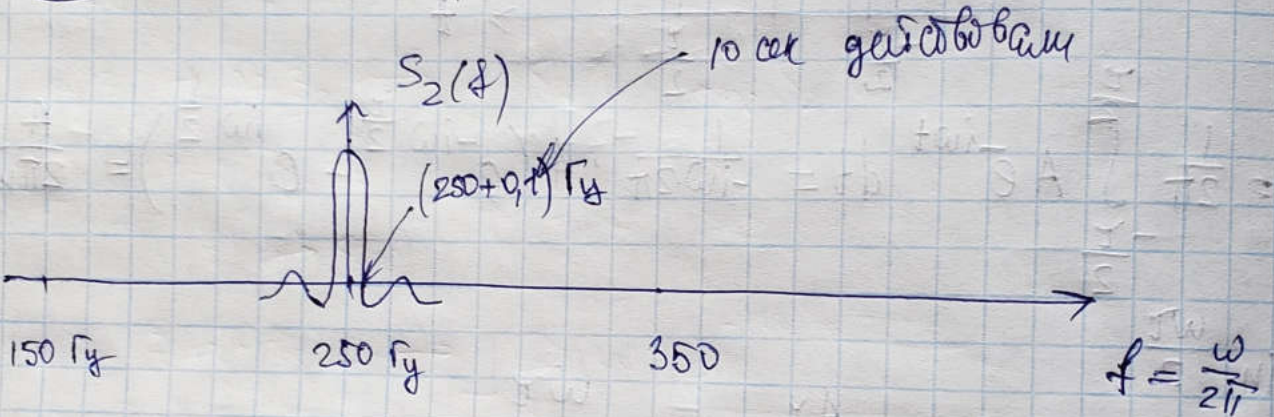
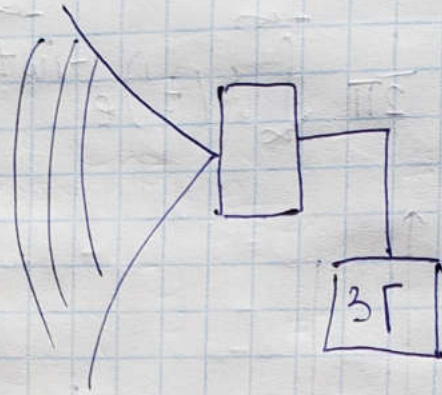
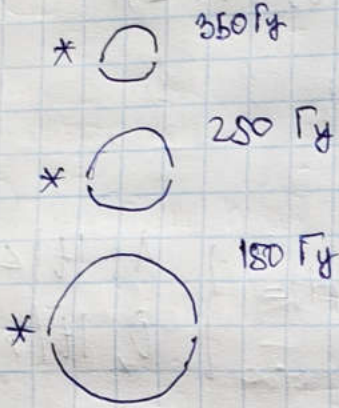
$$f(t) = \begin{cases} A e^{i\omega_0 t}, & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = \frac{A \tau}{2\pi} \text{sinc} \left(\frac{\omega - \omega_0}{2} \tau \right)$$



Спектр сигнала

6.3 Спектральная плотность мощности



$S(\omega) d\omega$

$|S(\omega) d\omega|^2$

средняя мощность: $(\omega, \omega + d\omega)$ - мощность мгновенная $(\omega, \omega + d\omega)$ - определение

$|S(\omega) d\omega|^2 \cdot \tau = |S(\omega) d\omega|^2 \cdot \frac{2\pi}{d\omega}$

$G(\omega) d\omega = 2\pi |S(\omega)|^2 d\omega$

$G(\omega) = 2\pi |S(\omega)|^2$ ср-я мощность

$[G(\omega)] = \frac{Вт}{Гц}$ - спектральная плотность мощности

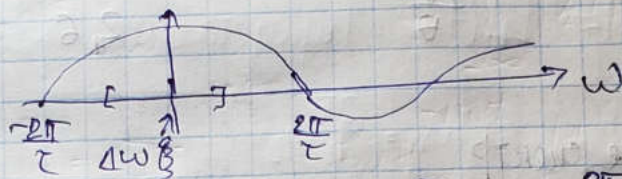
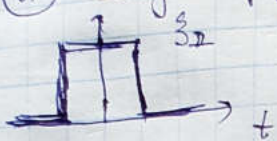
$$W_t = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{z}(t)|^2 dt \quad \text{— полная энергия сигнала}$$

$$W_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega$$

$$W_t = W_\omega \quad (\text{подсчет энергии на разных частотах})$$

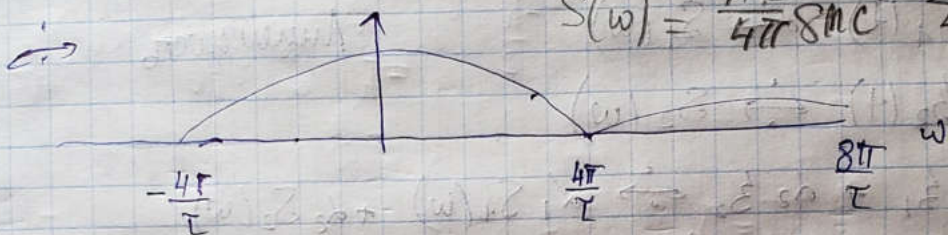
6.4) связь формы импульса и ширины спектра

$$S(\omega) = \frac{A\tau}{2\pi} \text{sinc} \frac{\omega\tau}{2}$$



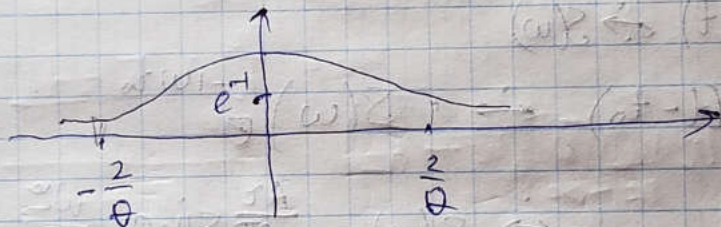
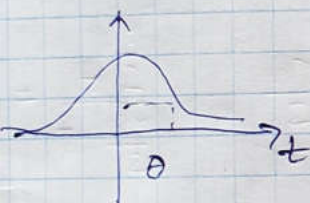
$$\Delta\omega = \left(\frac{2\pi}{\tau} - \left(-\frac{2\pi}{\tau} \right) \right) \frac{1}{2} = \frac{2\pi}{\tau}$$

$$S(\omega) = \frac{A\tau}{4\pi} \text{sinc}^2 \frac{\omega\tau}{4}$$



$$\tau \cdot \Delta\omega = 4\pi?$$

$$S(\omega) = \frac{A\theta}{2\pi} e^{-\frac{\omega^2\theta^2}{4}}$$



$$\tau \cdot \Delta\omega = ?$$

full width at half maximum

$$\tau_{FWHM} = 3(\tau_{FWHM}) = 0.5 \max z$$

$$\tau_{e^{-1}}$$

энергетическая плотность

$$W_t = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{z}(t)|^2 dt$$

$$W_{\tau_w} = \int_{-\frac{\tau_w}{2}}^{\frac{\tau_w}{2}} |\dot{z}(t)|^2 dt$$

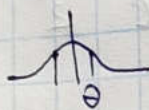
большая часть энергии?

$$W_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega$$

$$W_{\Delta\omega} = \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} G(\omega) d\omega$$

$$W_{\Delta\omega} = \xi W_\omega$$

$$\xi = 0,9$$



$$\tau_w$$

$$0,9\tau$$

$$0,54\tau$$

$$1,6\theta$$

$$\Delta\omega_w$$

$$\frac{5,1}{\tau}$$

$$\frac{5,2}{\tau}$$

$$\frac{1,64}{\theta}$$

$$\tau_w \cdot \Delta\omega_w$$

$$4,5$$

$$2,85$$

$$2,6$$

тем name, тем yue спектр

(66) Свойства преобразования Фурье

1. $\zeta_1(t) \leftrightarrow S_1(\omega)$

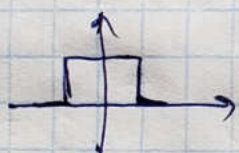
$\zeta_2(t) \leftrightarrow S_2(\omega)$

$\alpha_1 \zeta_1 + \alpha_2 \zeta_2 \leftrightarrow \alpha_1 S_1(\omega) + \alpha_2 S_2(\omega)$

2. Сдвиг во времени

$\zeta(t) \leftrightarrow S(\omega)$

$\zeta(t-t_0) \leftrightarrow S(\omega) e^{-i\omega t_0}$



$\leftrightarrow S(\omega) = \frac{A\tau}{2\pi} \text{sinc} \frac{\omega\tau}{2}$



$\leftrightarrow S(\omega) = \frac{A\tau}{2\pi} \text{sinc} \frac{\omega\tau}{2} \cdot e^{-i\omega t_0}$

$\cos\omega t_0 + i \sin\omega t_0$

3. Смещение

$\zeta(t) \leftrightarrow S(\omega)$

$\zeta(t)e^{i\omega_0 t} \leftrightarrow S(\omega - \omega_0)$

4. Перекрут

$\zeta_1(t) \leftrightarrow S_1(\omega)$

$\zeta_2(t) \leftrightarrow S_2(\omega)$

$\zeta_1(t) \cdot \zeta_2(t) \leftrightarrow S_1(\omega) \otimes S_2(\omega)$

$\int_{-\infty}^{\infty} S_1(\nu) S_2(\omega - \nu) d\nu$

$$\text{Есл } \int_{-\infty}^{\infty} z_1(t) z_2(t-\theta) d\theta \leftrightarrow S_1(\omega) \cdot S_2(\omega)$$

$$z_1(t) \otimes z_2(t) \leftrightarrow S_1(\omega) \cdot S_2(\omega)$$

7 Дискретное преобразование Фурье

7.1 Функции дискретного аргумента и ее спектр, Теорема Котельникова

$$\omega = 2\pi\nu$$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{2\pi S(\omega)}_{S(\nu)} e^{i2\pi\nu t} d\nu \quad \text{обратное преобразование Фурье}$$

$$z(t \pm T) = z(t)$$

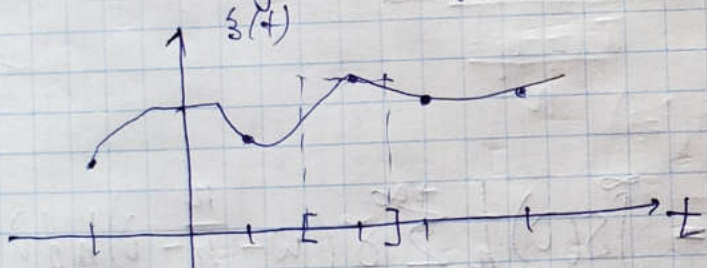
$$\Delta\nu = \frac{\omega_h}{2\pi} = \frac{2\pi}{T} \cdot n \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{n}{T}$$

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i2\pi n t / T}$$

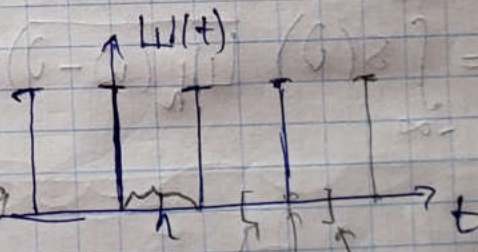
$$d_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} z(t) e^{-i2\pi n t / T} dt$$

$$t \rightarrow t_j = h \cdot j$$

$$z(t) \rightarrow z(j) \equiv z(h \cdot j) \equiv z(t_j) \equiv z_h(j)$$



$$u(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - h \cdot j) \quad \text{последовательность импульсов}$$



$$z_h(j) \equiv z(j) = z(t) u(t) \cdot h$$

$$\int_{h \cdot j - \frac{h}{2}}^{h \cdot j + \frac{h}{2}} z(t) dt = z(t_j) \cdot h$$

$$\int_{h \cdot j - \frac{h}{2}}^{h \cdot j + \frac{h}{2}} z_h(t) dt = \int_{h \cdot j - \frac{h}{2}}^{h \cdot j + \frac{h}{2}} z(t) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - h \cdot j) h dt = z(h \cdot j) \cdot h$$

$$z(t) \leftrightarrow S(\omega)$$

$$z(j) \equiv z_h(j) \leftrightarrow S_h(\omega) \quad ?$$

дискретизация, именно так как отсюда

$S_h(\omega)$ -? *мыслим* $S_h(\omega) = S(\omega) \otimes \overline{W}_h(\omega) \cdot h$

$S_h(t) = S(t) \cdot W(t) \cdot h$, то $S_h(\omega) = S(\omega) \otimes \overline{W}_h(\omega) \cdot h$

$\overline{W}_h(\omega)$ -? *мыслим* $W(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - h \cdot j)$ *мыслим* $W(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - h \cdot j)$

$W(t \pm h) = W(t)$ *периодическая по времени*

$W(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - h \cdot j)$ $\omega_n = \frac{2\pi}{h} \cdot n$

$dn = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} W(t) e^{-i\omega_n t} dt = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - h \cdot j) e^{-i\omega_n t} dt$ *мониторим*

$\int \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$ $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta(t) e^{-i\omega_n t} dt = \frac{1}{h} e^{-i\omega_n \cdot 0} = \frac{1}{h}$ *при $j=0$ $y=1$ $t=0$ $\omega_n=0$*

$\overline{W}_h(\omega) = \left\{ \begin{matrix} dn = \frac{1}{h} \\ n = -\infty, \infty \end{matrix} \right.$ $\omega_n = \frac{n}{h}$

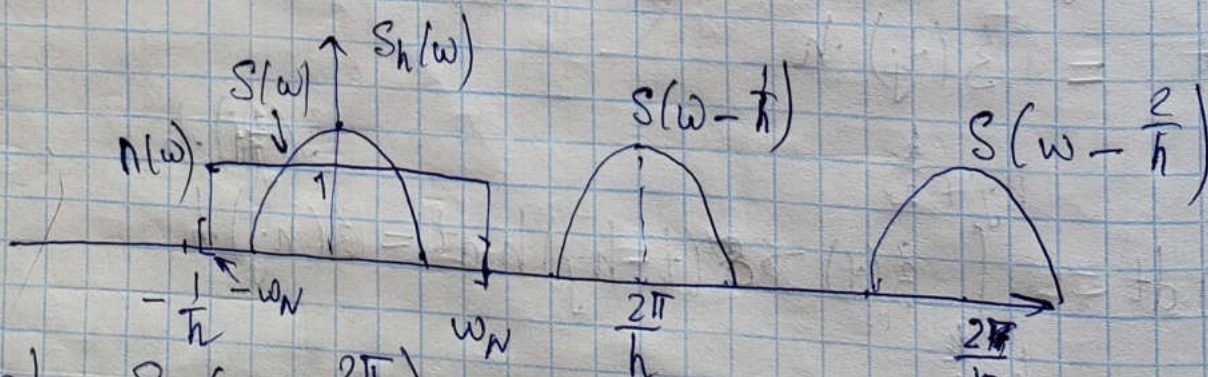
$\overline{W}_h(\omega) = \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{n}{h})$

$S_h(\omega) = S(\omega) \otimes \overline{W}_h(\omega) \cdot h$

$S_h(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) \overline{W}_h(\omega - \nu) h d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{n}{h} - \nu) h d\nu$

$\nu \rightarrow \omega - \frac{n}{h}$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) \delta(\omega - \frac{n}{h} - \nu) h d\nu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega - \frac{n}{h})$

$S_h(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega - \frac{n}{h})$



$S_h(\omega) = S_h(\omega \pm \frac{2\pi}{h})$

Частота Найквиста

$$\omega_N = \frac{2\pi}{2h}$$

$$\omega_N = \frac{1}{2h}$$

только хар-ка сети кодируется
тог арсенал частот который
сеть может воспроизвести.

Если $S(\omega)$ - ограниченный, т.е.

$$S(\omega) = \begin{cases} \neq 0 & |\omega| \leq \omega_N \\ 0 & |\omega| > \omega_N \end{cases}$$

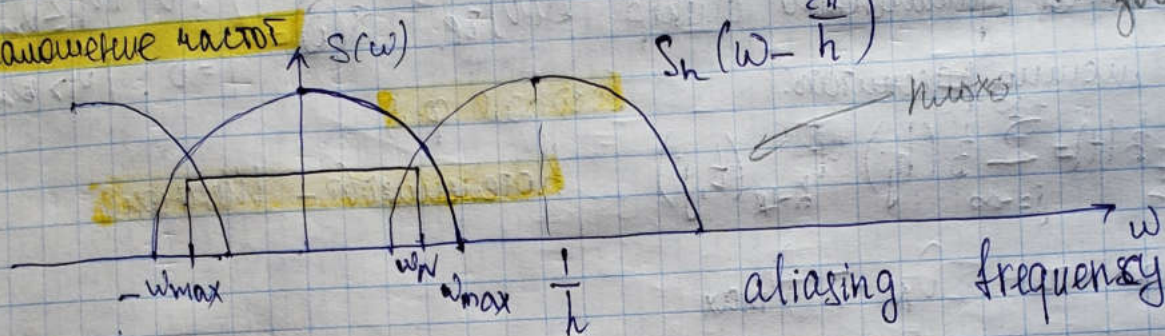
то $S_h(\omega) \cdot \Pi(\omega) = S(\omega)$, где $\Pi(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_N \\ 0 & |\omega| > \omega_N \end{cases}$

Если $\omega_N < \omega_{max}$, то

$$S_h(\omega) \cdot \Pi(\omega) \neq S(\omega)$$

ω_N - верхняя граница частотного спектра
при котором не происходит наложения
или частот при периодизации
спектра в дискретной преобразовании Фурье.

Наложение частот



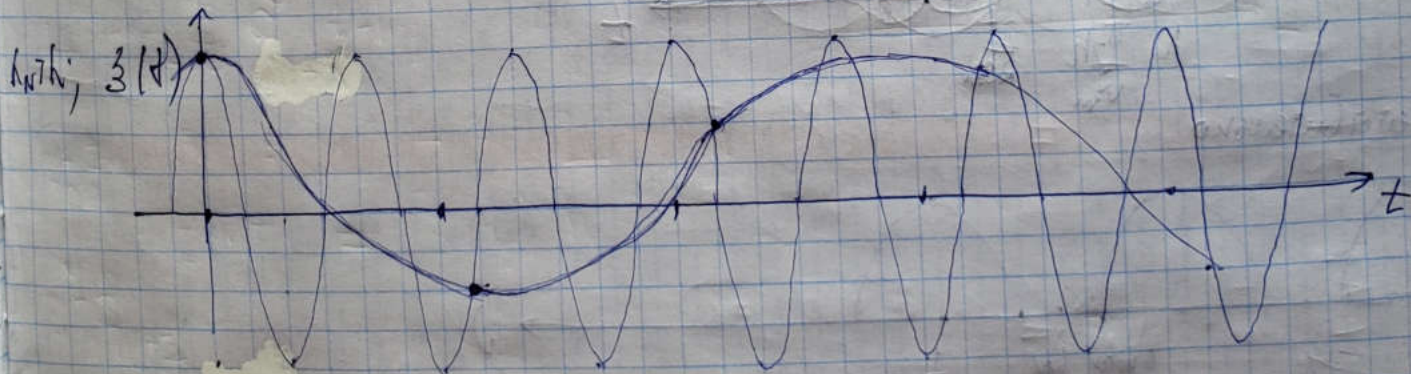
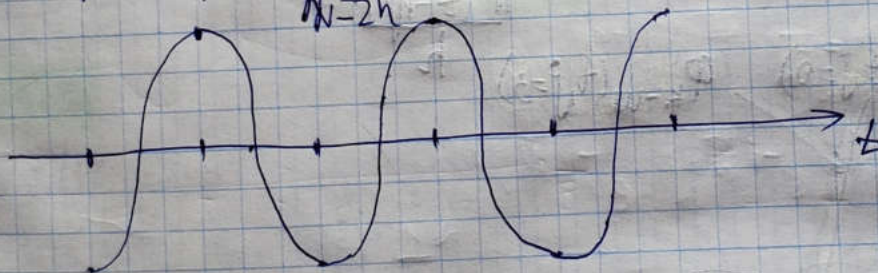
Длина волны Найквиста

$$\lambda_N = \frac{2\pi}{\omega_N}$$

$$\lambda_N = 2h$$

$$\lambda_N = \frac{1}{\omega_N}$$

$$\lambda = c \cdot T \rightarrow \lambda = \frac{c}{f}$$



$$\omega < \omega_N$$

$$\omega < \omega_N$$

$$\lambda > \lambda_N$$

Скорость
света

$$\lambda_N = 2h$$

$$\omega_N = \frac{1}{2h}$$

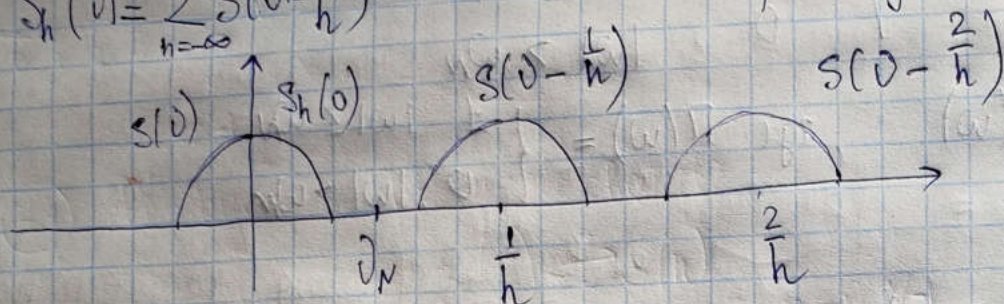
$$\omega_N = \frac{2\pi}{\lambda_N}$$

72 Теорема Котельникова - Шеннона.

$z(t) \rightarrow z_h(t) \equiv z(j) \equiv z(hj)$ переходим к дискретному аргументу

$$z_h(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} z(j) \text{ш}_h(t-hj) \cdot h$$

(спектр исходной ф-ции сдвинутого)



Теорема

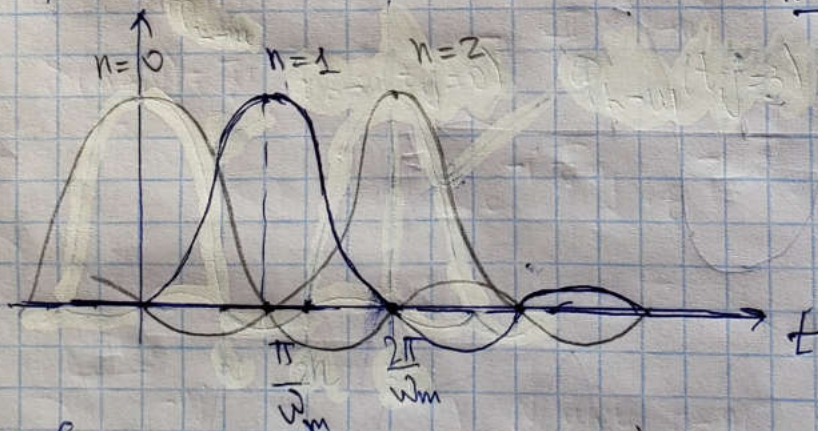
Если $z(t)$ имеет ограниченный спектр $S(\omega)$ т.е. $S(\omega) = \begin{cases} \neq 0 & |\omega| \leq \omega_{\max} \\ = 0 & |\omega| > \omega_{\max} \end{cases}$ то $z(t)$ можно рассчитать.

$$z(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} z(hj) \varphi_{k-h}(t, j)$$

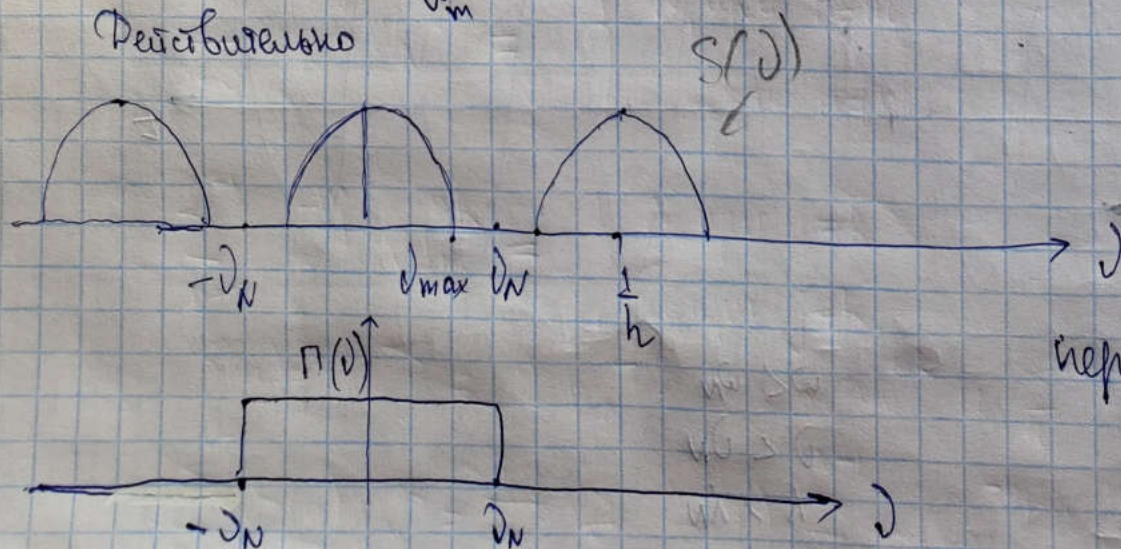
всёобая ф-я
Котельникова - Шеннона

при h таком, что $\omega_N \geq \omega_{\max}$
частота Найквиста

$$\varphi_{k-h}(t, j) = \text{sinc}\left(\frac{\pi(t-hj)}{h}\right) = \frac{\sin \frac{\pi(t-hj)}{h}}{\frac{\pi(t-hj)}{h}}$$



Действительно



переходим

$S(\omega) = S_h(\omega) \cdot \Pi(\omega)$
 т.к. $S(\omega) = S_h(\omega) \cdot \Pi(\omega)$, то теорема о свертке
 $\hat{z}(t) = \hat{z}_h(t) \otimes \Pi(t)$, $\Pi(t) = ?$

По свойствам убо ограниченной функции

$$\Pi(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{при } |\omega| \leq \omega_N \\ 0, & \text{при } |\omega| > \omega_N \end{cases}$$

$$\Pi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(\omega) e^{i2\pi\omega t} d\omega = \int_{-\omega_N}^{\omega_N} e^{i2\pi\omega t} d\omega = \frac{1}{2i\pi t} \left(e^{i2\pi\omega_N t} - e^{-i2\pi\omega_N t} \right) \Rightarrow$$

$$2i \sin 2\pi \omega_N t = 2i \sin \frac{\pi t}{h}$$

$$\Rightarrow \Pi(t) = \frac{1}{\pi t} \sin \frac{\pi t}{h} = \frac{1}{h} \operatorname{sinc} \frac{\pi t}{h}$$

Отсюда:

$$\hat{z}(t) = (\hat{z}(t) \otimes \frac{1}{h} \operatorname{sinc} \frac{\pi t}{h}) \otimes (\frac{1}{h} \operatorname{sinc} \frac{\pi t}{h}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \hat{z}(\theta) \underbrace{\frac{1}{h} \operatorname{sinc} \frac{\pi(t-\theta)}{h}}_{\delta(\theta - jh)} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{z}(\theta) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - jh) \operatorname{sinc} \frac{\pi(t-\theta)}{h} d\theta \Rightarrow$$

отсюда от θ только осталось $-jh$

$$\hat{z}(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{z}(jh) \cdot \operatorname{sinc} \frac{\pi(t-jh)}{h}$$

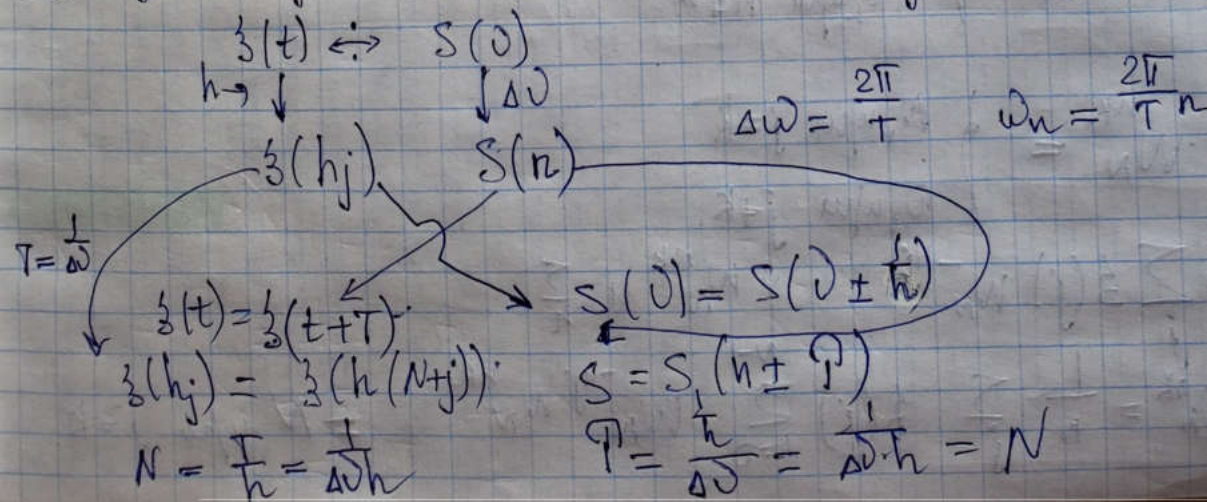
$\Phi_{k-w}(t_{ij})$

Теорема

Если $\hat{z}(t)$ имеет ограниченный спектр $S(\omega)$: $S(\omega) = \begin{cases} \neq 0 & |\omega| \leq \omega_{max} \\ = 0 & |\omega| > \omega_{max} \end{cases}$
 и h такое, что $\omega_N < \omega_{max}$

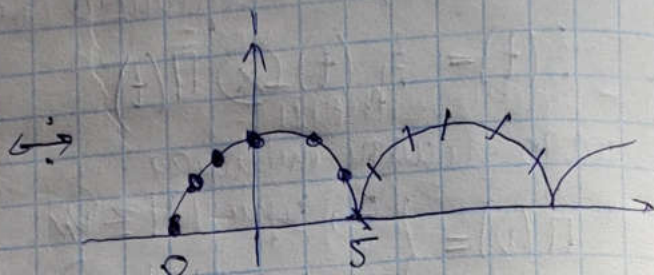
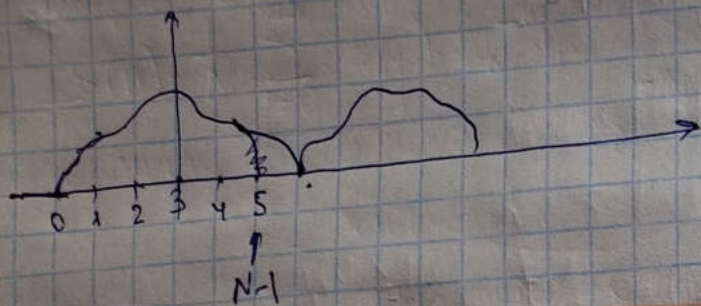
то $\hat{z}(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{z}_h(j) \Phi_{k-w}(t, j) = \begin{cases} = \hat{z}(t_j) \\ \neq \hat{z}(t \neq t_j) \end{cases}$

7.3 Взаимосвязь спектра и сигнала при дискретизации



$$z(hj) = z(h(j+N)) \Leftrightarrow S(n) = S(n \pm N)$$

$$j, n = 0, \dots, N-1$$



§4.4 **Решение ДПФ и его свойства.**

$$z(j) \Leftrightarrow S(n)$$

$$j=0, N-1$$

$$S(n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} z(j) W_N^{-nj}$$

$$n=0, N-1$$

$$W_N^{-nj} = e^{-i \frac{2\pi}{N} nj}$$

N - размер массива

j - индекс

n_j - номер

$$d_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} z(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} nt} dt$$

$$T = h \cdot N$$

$$t = j \cdot h$$

$$\frac{1}{nh} \sum_{j=0}^{N-1} z(hj) e^{-i \frac{2\pi}{Nh} nhj} h$$

$$h=1?$$

густота дискретизации

непрерывность

1) $S(n) = S(n+N)$ Дискретность

$$S(n+N) = \frac{1}{N} \sum_j z(j) e^{-i \frac{2\pi}{N} j(N+n)}$$

$$e^{-i \frac{2\pi}{N} nj} \cdot e^{-i \frac{2\pi}{N} jN} = 1$$

ортонормальность

$$\sum_{j=0}^{N-1} W_N^{-nj} W_N^{mj} = \begin{cases} N, & \text{если } n=m \\ 0, & \text{если } n \neq m \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-nj} W_N^{nk} = \begin{cases} N, & \text{если } j=k \\ 0, & \text{если } j \neq k \end{cases}$$

$$S(n) = \frac{1}{N} \sum_j z(j) W_N^{-nj} \cdot W_N^{nk} \text{ и } \sum_k$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} S(n) W_N^{nk} = \frac{1}{N} \sum_j z(j) \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-nj} W_N^{nk}$$

$$= N \text{ если } j=k$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} S(n) W_N^{nk} = \hat{z}(k) \quad \text{Обратное ДПФ}$$

1. Линейность

$$\alpha \hat{z}_1(j) + \alpha_2 \hat{z}_2(j) \leftrightarrow \alpha S_1(u) + \alpha_2 S_2(u)$$

2. Сдвигивание

$$\hat{z}(j) \leftrightarrow S(u)$$

$$\hat{z}(j - k_0) \leftrightarrow S(u) W_N^{-jk_0}$$

3. Смещение

$$\hat{z}(j) W_N^{-mj} \leftrightarrow S(n - m)$$

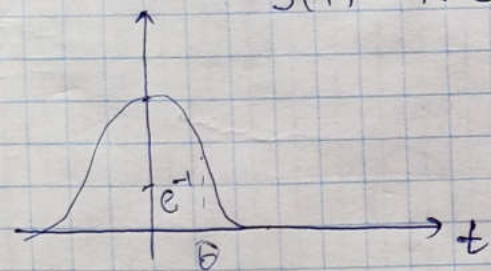
4. Свертка

$$\hat{z}_1(j) \hat{z}_2(j) \leftrightarrow S_1(u) \otimes S_2(u)$$

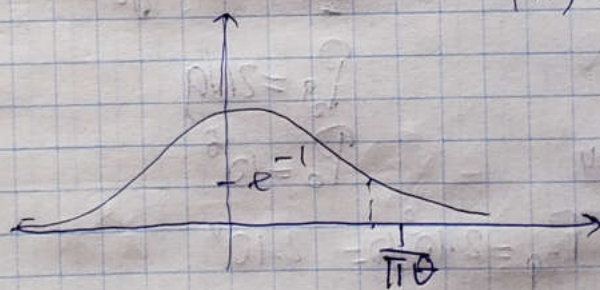
$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} S_1(m) S_2(n - m)$$

7.5 Практика ДПФ

$$\hat{z}(t) = A e^{-\frac{t^2}{\theta^2}}$$



$\leftrightarrow$



$$S(u) = \frac{A\theta}{2\pi} e^{-u^2 \theta^2 \pi^2}$$

Замечание 1.

Выбор h зависит от $S(u)$ от $\nu_{\max}$. Надо $\nu_N = \frac{1}{2h} \gg \nu_{\max}$

Пусть $\nu_{\max}$ таково, что $S(\nu_{\max}) \ll \max_u S(u)$

$$\text{Пусть } h = \frac{\theta}{3} \quad \nu_{\max} = \nu_N = \frac{3}{2\theta}$$

$$S(\nu_{\max} = \frac{3}{2\theta}) = \frac{A\theta}{2\pi} e^{-\frac{9}{4\theta^2} \theta^2 \pi^2} = \frac{A\theta}{2\pi} e^{-2.25} \sim A\theta 10^{-11}$$

Замечание 2.

$$\text{Пусть } \hat{z}(\pm \frac{T}{2}) = e^{-25} \hat{z}(t=0)$$

$$A e^{-\frac{(\frac{T}{2})^2}{\theta^2}} = e^{-25} A$$

$$\frac{T}{2} = 5$$

$$T = 10 \cdot \theta$$

$$N = \frac{T}{\Delta} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{\frac{1}{30000}} = 3000 \text{ (узлов)} \approx 32$$

Алгоритм БПФ:

$$S(n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} z(j) W_N^{-nj}$$

где $n=0, N-1$
 Операция: вычисление W_N^{-nj}
 × на $z(j)$
 Σ суммирование

Неправильно для $S(n)$ одного n

Для всех $S(n)$ надо N^2 операций.

Пусть $N=2^q$ $j'=2m$ $j''=2m+1$ $m=0 \dots \frac{N}{2}-1$

$$S(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} z(2m) W_N^{-n2m} + \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} z(2m+1) W_N^{-n(2m+1)}$$

$\left(\frac{N}{2}\right)^2$

$$P' = 2 \left(\frac{N}{2}\right)^2 + N = \frac{N^2}{2} + N; \quad P_0 = N^2$$

$$4 \left(\frac{N}{4}\right)^2 + N$$

$$N = 2^q$$

$$P_{2^q} = 2N \log_2 N$$

$$P_q = 2Nq$$

$$P_0 = 10^6$$

$$N = 2^{10} = 1024$$

$$P_{2^q} = 2 \cdot 10^3 \cdot 10 = 2 \cdot 10^4$$

7.6

Секундарная фильтрация

$$z(t) \xrightarrow{\text{ПФП}} S(\omega) \xrightarrow{\text{ОПФ}} z'(t)$$

$$z(t) \xrightarrow{\text{ПФП}} S(\omega) \xrightarrow{\text{Фильтрация}} S(\omega) \Pi(\omega) \xrightarrow{\text{ОПФ}} z'(t)$$

$z(t) = z(t + T)$ - период Фурье, спектр дискретный.

Если $z(t)$ не имеет периода, интеграл Фурье, спектр сплошной.
 $z(j) \leftrightarrow S(u)$, спектр дискретный и периодический.

Волны в диспергирующих средах.

8 Дисперсия

8.1 Поиски

$$\zeta(x,t) = a \cdot e^{i(\omega t - kx)} = a \cdot e^{ik(ct - x)}$$

k - волновое число

$$\frac{\omega}{k} = c$$

$$\omega = \omega(k) = c(k) \cdot k$$

вообще.

Волновой пакет - совокупность волн с разными длинами волн и частотами.

Если $c(k) = \text{const}$ - дисперсии нет.

Если $c(k) \neq \text{const}$ - дисперсия есть

Опр. Зависимость фазовой скорости от частоты, вследствие которой происходит изменение волнового пакета.

Временная: $\omega \approx \omega_0$ - влияние на частоту соседних точек. Отличия фазы ($c(\omega) \neq \text{const}$) зависят от частоты.

Пространственная: $L \approx L$ - влияние на длину волны соседних точек.

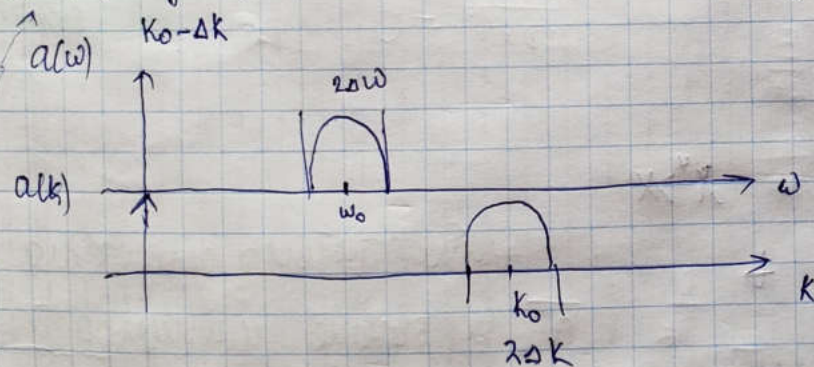
8.2 Первое приближение в теории дисперсии

Волновой пакет - суперпозиция гармоник.

$$\zeta(x,t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} a(k) e^{i(\omega(k)t - kx)} dk$$

Узконасосный: $\Delta k \ll k_0$

$$\Delta \omega \ll \omega_0$$



$$-\omega t - kx = \omega(k)t - kx = \text{введ. Фейнмана в т. } k_0 = \left[\omega(k_0) + \frac{\partial \omega}{\partial k} \Big|_{k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \Big|_{k_0} (k - k_0)^2 + \dots \right]$$

$$-(k - k_0)x - k_0 x = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \Big|_{k_0} t - x \right) (k - k_0) + \left(\omega(k_0)t - k_0 x \right)$$

$$\zeta(x,t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} a(k) e^{i \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \Big|_{k_0} t - x \right) (k - k_0)} dk \cdot e^{i(\omega(k_0)t - k_0 x)}$$

узконасосный волновой пакет

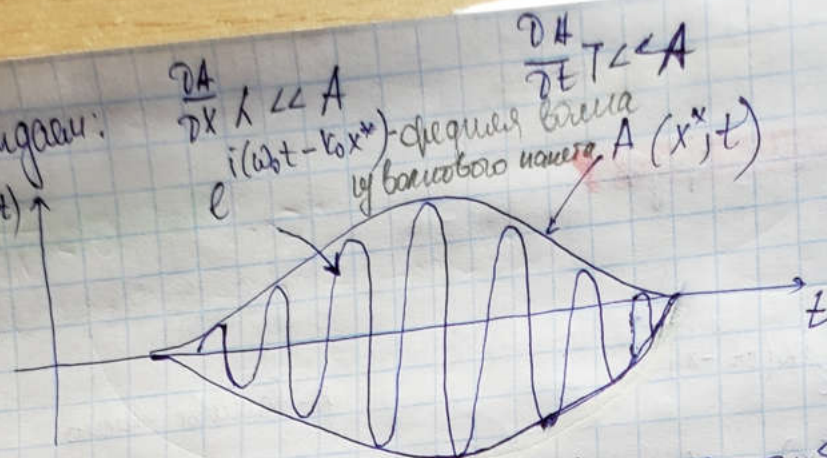
$$\zeta(x,t) = A(x,t) e^{i(\omega_p t - k_0 x)}$$

где $A(x,t)$ - огибающая, которая задает узконасосный волновой пакет.

$$A(x,t) = \int a(k) e^{i(\omega_p t - x)(k - k_0)} dk$$

$V_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \Big|_{k_0}$ групповая скорость

Утверждение:
 $\frac{\partial A}{\partial x} \ll A$
 $i(\omega t - k_0 x)$ - фазовая часть
 у волнового пакета $A(x, t)$



$v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \big|_{k_0}$ - скорость распространения огибающей - групповая скорость

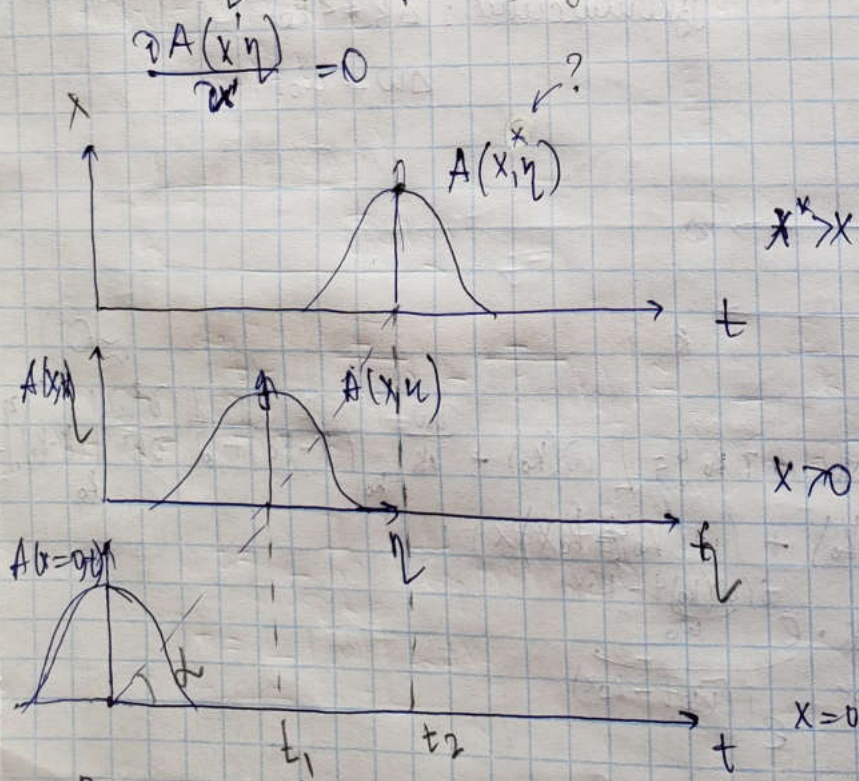
$c = \frac{\omega}{k}$ - фазовая скорость гармонической составляющей на частоте ω .

8.3 Уравнение переноса для огибающей волнового пакета.
 $A(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} a(k) e^{i(v_{gr} t - x)(k - k_0)} dk$ - переписано ранее на уроке

решение волн. ур-я
 $A(x, t) = f(v_{gr} t - x) \rightarrow$ зависит только от $v_{gr} t - x$ т.к. фронт переноса
 $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{v_{gr}} \frac{\partial A}{\partial t} = 0$ ур-е переноса
 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y} (-\frac{1}{v_{gr}})$
 $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}$

Безразмерные координаты
 $x' = x, \eta = t - \frac{x}{v_{gr}}$ - безразмерное время

переходим к новым переменным
 $\frac{\partial A}{\partial x'} - \frac{1}{v_{gr}} \frac{\partial A}{\partial \eta} + \frac{1}{v_{gr}} \frac{\partial A}{\partial \eta} = 0$
 $\frac{\partial A(x', \eta)}{\partial x'} = 0$



наблюдатель сидит на вершине шмюра и видит, что шмюр не изменился.

$t_{gr} = v_{gr} \tau$ т.е. $A(x', \eta)$ - постоянная

В первом приближении дисперсия формы волнового пакета не имеет, огибающая бежит со скоростью v_{gr} .

8.4) Коэффициент или аналогичная дисперсия Формула Реле

$$\omega = \omega(k) \text{ или } c = c(k) \text{ или } n = n(k) \text{ или } n = n(\omega)$$

$$v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} (c(k) \cdot k) = c(k) + k \frac{\partial c(k)}{\partial k}$$

$$\omega = ck$$

$$v_{gr} = c(k) + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\partial c}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial k}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial k} = -\frac{2\pi}{k^2} = -\frac{2\pi}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2} = -\frac{\lambda^2}{2\pi}$$

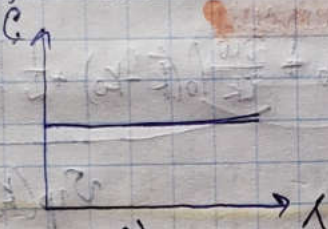
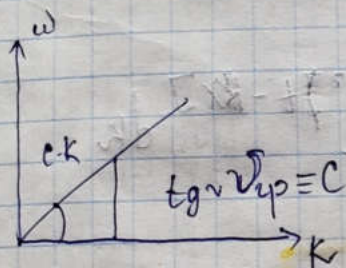
$$\frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{2\pi}{k} \right) = -\frac{2\pi}{k^2}$$

$$v_{gr}(k) = c(k) - k \frac{\partial c(k)}{\partial k} \text{ - формула Реле}$$

Замечание 1.

$$\frac{\partial c}{\partial k} = 0 \quad c(k) = \text{const} \text{ - дисперсия нет}$$

$$\omega(k) = c(k) \cdot k = \text{const} \cdot k$$



$$n(k) = \frac{c_0}{c(k)}$$

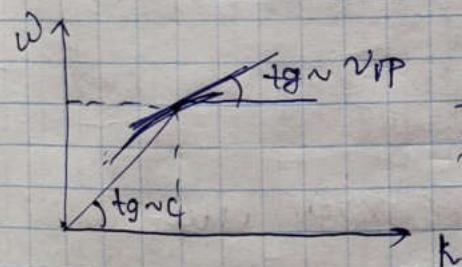


суп. фазовый

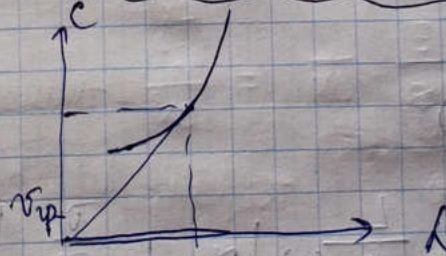
суп. г-н

$$\frac{\partial c}{\partial k} > 0 \Rightarrow v_{gr} < c, \quad \frac{\partial \omega}{\partial k} < \frac{\omega}{k}$$

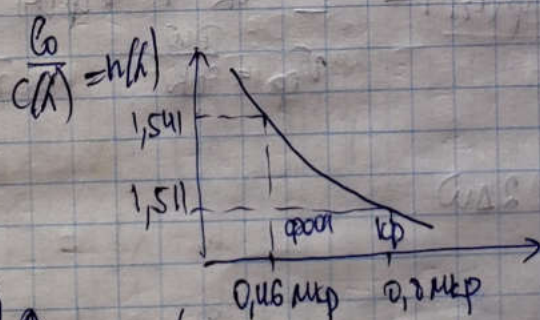
Замечание 2.



$$\frac{\partial c}{\partial k} \cdot k$$

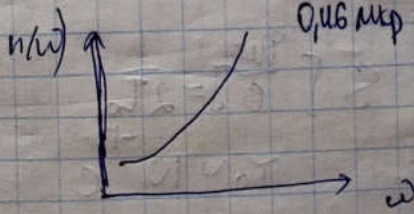


Коэффициент дисперсия



Коэффициент дисперсия: $v_{gr} < c$

$$\lambda = c \cdot T = c \cdot \frac{2\pi}{\omega}$$

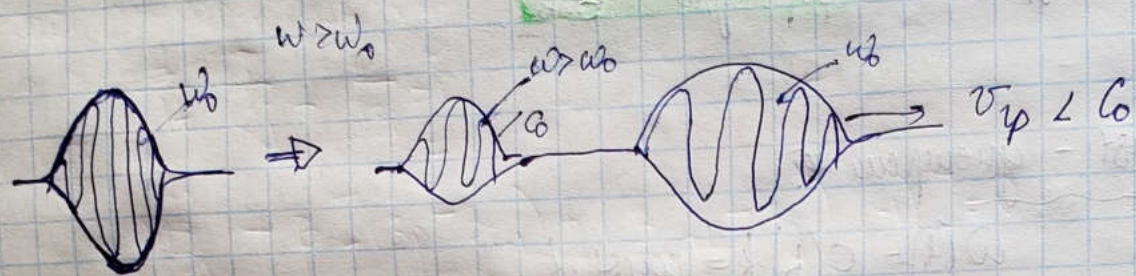
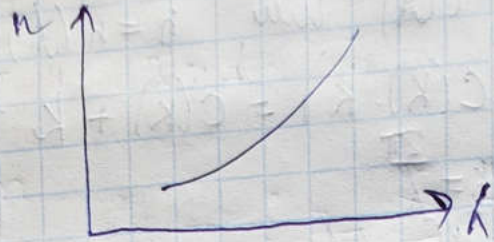
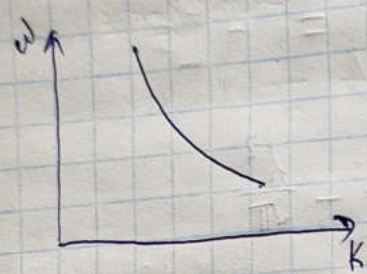


Замечание 3

аналитическая
групповая

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} < 0$$

$$v_{gr} > c$$



8.5

Более подробное Т. групповая

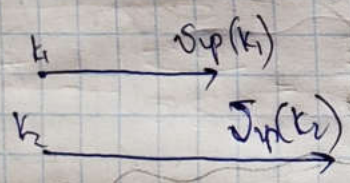
$$\psi(x,t) = \int_{k=k_0} a(k) e^{i \left[\omega_0 + \frac{\partial \omega}{\partial k} (k-k_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} (k-k_0)^2 \right] t - i k x} dk$$

$$v_{gr}(k)/(k-k_0)$$

$$\left[\frac{\partial \omega}{\partial k} \Big|_{k_0} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} (k-k_0) \right] = v_{gr}(k)$$

$$A(x,t) = \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} a(k) e^{i(v_{gr}(k)t - x)(k-k_0)} dk$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$



L-квант по расхождению

теорема Лапласа

$$\delta t = \left| \frac{L}{v_{gr}(k_1)} - \frac{L}{v_{gr}(k_2)} \right| \approx L \left| \frac{\partial}{\partial k} \left| \frac{1}{v_{gr}(k)} \right| \right|_{k_0} \Delta k$$

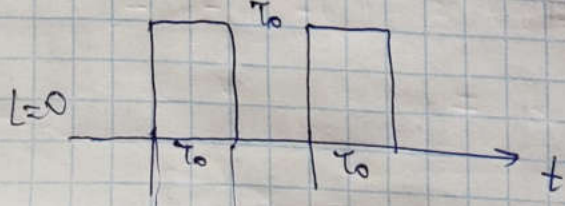
$$v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad \frac{1}{v_{gr}} = \frac{\partial k}{\partial \omega}$$

$$\delta t = L \left| \frac{\partial}{\partial \omega} \left| \frac{1}{v_{gr}(\omega)} \right| \right|_{\omega_0} 2\Delta \omega$$

$$\delta t = L \left| \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} 2\Delta \omega$$

$\Delta \omega \tau = A$ — оценка угловой ширины пачки

$$\Delta t = L \cdot \frac{\partial k}{\partial \omega} \cdot \frac{A}{c}$$

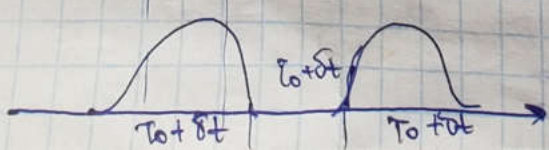


$S \left[\frac{\partial \omega}{c} \right] = 2T_0$ ширина спектра пачки

$T_0 \sim 10^{-12}$ с

$S = 95 \cdot 10^{12}$ Гц/с

8.6



$S \left[\frac{\partial \omega}{c} \right] = \frac{1}{2(T_0 + \delta t)}$ уг-ва групповая

$$S = \frac{1}{2(T_0 + \delta t)} = \frac{1}{2(T_0 + L \left| \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right| 2\omega)}$$

$2\omega T_0 = 2\pi$ - теорема о импульсе частотной моды

скорость изменения имп-ии в дискр-среде

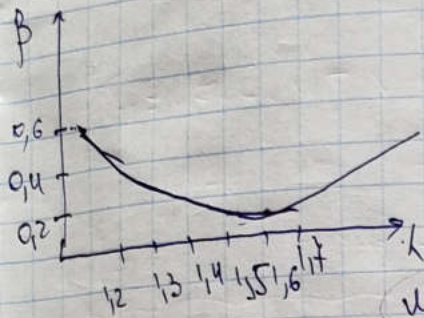
$$S(T_0) = \frac{1}{2(T_0 + L \left| \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right| \frac{2\pi}{T_0})} \text{ сдт/с}$$

скорость изменения имп-ии

Отображение:



$$\beta = 10 \lg \frac{P(\text{дм})}{P_0} \quad P - \text{мощность}$$

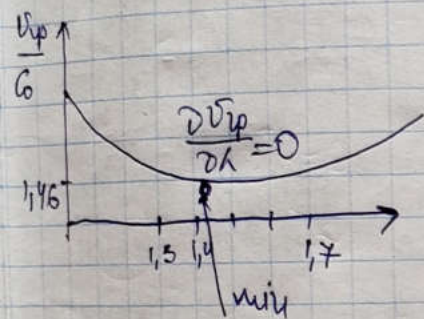


500 мкм/с

волновое, оптическое

микроны

минимум света? минимизация потерь



2 ГГц/с

зачет дисперсии происхождения расширения волнового пакета со временем

Второе приближение теории дисперсии.

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{v_{gr}} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i}{2} \left| \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right| \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$$

$$x \rightarrow x'; \quad t \rightarrow \eta = t - \frac{x}{v_{gr}}$$

ур-е дисперсии для сдвигающей волнового пакета во втором приближении.

$$\frac{\partial A(x', \eta)}{\partial x'} - \frac{i}{2} \left| \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right| \frac{\partial^2 A(x', \eta)}{\partial \eta^2} = 0$$

ур-е параболического типа с мнимым членом

$$A(x', \eta) = \frac{A_0}{\tau(x)} e^{-\frac{\eta^2}{\tau^2(x)}} \quad \text{решение ур-я}$$

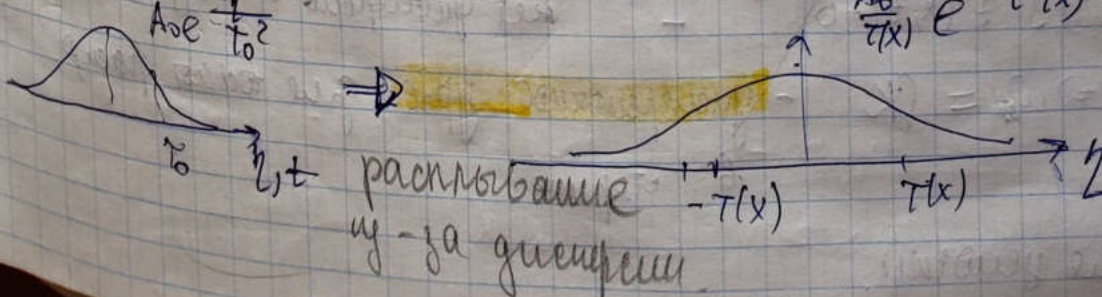
$L_{дисп}$ - длина дисперсии, измеряется на расстоянии x'

$$\tau^2(x') = \tau_0^2 \left[1 + \left(\frac{x'}{L_{дисперсион}} \right)^2 \right]$$

$$L_{дисп} = \left(\left| \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right| \right)^{-1}$$

$$A_0 e^{-\frac{\eta^2}{\tau_0^2}}$$

$$\frac{A_0}{\tau(x)} e^{-\frac{\eta^2}{\tau^2(x)}}$$

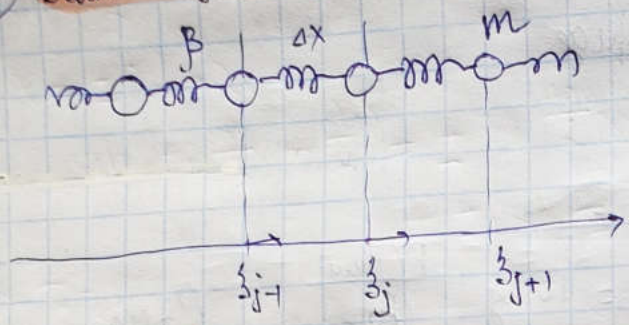


β - коэф. упругости
 $j \in (-\infty, +\infty)$

9) Пространственная дисперсия

цепочка бесконечная
 масса

9.1) Вали в ячейках



$T[\dot{z}_j] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{m}{2} (\dot{z}_j)^2$ кин. энергия

$V[z_j] = \sum_j \frac{\beta}{2} (z_j - z_{j-1})^2$ потенциальная энергия

Запишем ур-е Лагранжа
 $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_j} + \frac{\partial V}{\partial z_j} = 0$

$m \ddot{z}_j + \beta [(z_j - z_{j-1}) + (z_{j+1} - z_j) (-1)] = 0$

$\ddot{z}_j + \frac{\beta}{m} (z_{j-1} - 2z_j + z_{j+1}) = 0$
 $\Delta^2 z_j$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_j} = m \dot{z}_j$
 $\frac{\partial V}{\partial z_j} = \beta (z_j - z_{j-1}) - \beta (z_{j+1} - z_j)$

$\frac{\partial V}{\partial z_j} = \beta (z_j - z_{j-1}) - \beta (z_{j+1} - z_j)$

$\ddot{z}_j - \frac{\beta}{m} \Delta^2 z_j(t) = 0$

$j = -\infty, +\infty$



$\rho \cdot \Delta x = m$

$\beta = \frac{E}{\Delta x} S$
 $\frac{\beta}{m} = \frac{E}{\rho \cdot \Delta x} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{1}{\Delta x^2} = \frac{G^2}{\Delta x^2}$

G - скорость распространения волны

модуль Юнга (способность материала сопротивляться деформации)

$\ddot{z}_j - G^2 \frac{\Delta^2 z_j}{\Delta x^2} = 0$

Дифференциально-разностное ур-е

При $\Delta x \rightarrow 0$

$\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} - G^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ ур-е

волновое ур-е для непрерывной среды

предположим $z(x,t) = a e^{i(\omega t - kx)}$
 в ур-е $[-\omega^2 - G^2(-k^2)] z(x,t) = 0$
 $\Rightarrow \omega = Gk$

- решение

- нет дисперсии в непрерывной среде

- дисперсионное ур-е для волны распр. в среде

$\omega = \omega(k)?$

где ячейки

$$z_j(t) = a e^{i(\omega t - k \Delta x j)} = a e^{i(\omega t - x j)}$$

$$a \left\{ -\omega^2 - G^2 \frac{1}{\Delta x^2} [e^{-ix} - 2 + e^{ix}] \right\} e^{i(\omega t - x j)} = 0$$

$$2 \cos x - 2$$

подставим не в волновое
уравнение, а в уравнение
из послед. уравнения.

$$\left\{ \frac{d^2 z_j}{dt^2} - G^2 \frac{1}{\Delta x^2} \right\} z_{j-1} - 2 z_j + z_{j+1} = 0$$

$$e^{-ix(j-1)} - 2e^{-ixj} + e^{-ix(j+1)}$$

$$\omega^2 = G^2 \frac{1}{\Delta x^2} 4 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\omega^2 = G^2 k^2 \left(\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2} \right)$$

$$x = k \cdot \Delta x$$

$$\omega(k) = Gk \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)$$

называется пространственная дисперсия.

$$c = \frac{\omega}{k} = G \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

$$\frac{\omega}{k} = G_0 \frac{\sin \frac{k \Delta x}{2}}{\frac{k \Delta x}{2}} \Rightarrow \omega = k G_0 \frac{\sin \frac{k \Delta x}{2}}{\frac{k \Delta x}{2}}$$

$$v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = G_0 \cos \frac{x}{2} \neq v \Rightarrow$$

если дисперсия $\frac{\partial \omega}{\partial k} = G_0 \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\cos \frac{k \Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = G_0 \cos \frac{x}{2}$

Рассмотрим приближение

$$x \ll 1 \quad k \cdot \Delta x \ll 1 \quad \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x \ll 1$$

расстояние между молекулами.

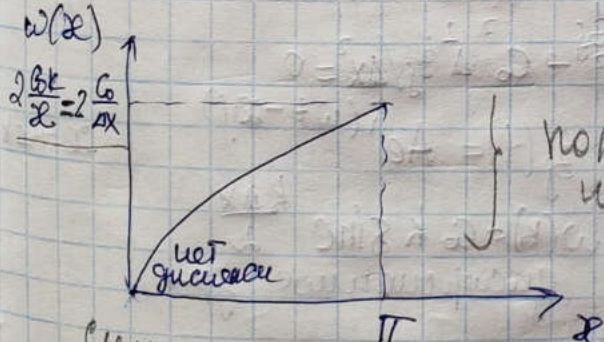
$$\omega(k) = G_0 k$$

нет дисперсии

помню что $\cos 0 = 1$

$$x \leq 1$$

$$\omega(k) = G_0 k \cdot \frac{\sin \frac{k \Delta x}{2}}{\frac{k \Delta x}{2}}$$



Скорость распространения не увеличивается

полоса прозрачности

$$z_1(t) = a e^{i(\omega t - x j)}$$

Если $x = \pi \Rightarrow \sin$ равен 1.

$$\omega_{max} = 2 \frac{G_0}{\Delta x}$$

$$z_1(t) = a e^{i(\omega_{max} t - \pi j)}$$

$$\omega > \omega_{max} \quad \omega > 2 \frac{G_0}{\Delta x}$$

$$G_0 k \frac{\sin \frac{k \Delta x}{2}}{\frac{k \Delta x}{2}} > 2 \cdot \frac{G_0}{\Delta x}$$

$$\sin \frac{k \Delta x}{2} > 1 \quad \sin \frac{x}{2} > 1$$

$$x = \pm i \delta_0 + \delta_0$$

$$\omega = \omega_{\max}, \omega > \frac{2G_0}{\Delta x}, \quad \text{Cok} \frac{\sin \frac{k\Delta x}{2}}{\frac{k\Delta x}{2}} > 2 \frac{G_0}{\Delta x}$$

$$\sin \frac{k\Delta x}{2} > 1?$$

$$\varphi = \pm i\varphi_0 + \varphi_0$$

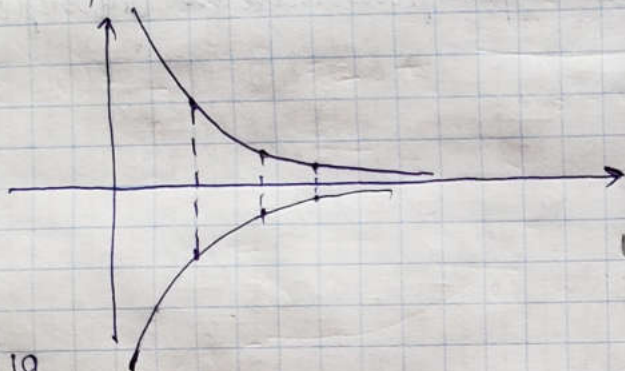
$$\sin\left(\pm i\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\varphi_0}{2}\right) = \pm \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\cos(\pm i\frac{\varphi_0}{2})}{\text{ch} \frac{\varphi_0}{2}} \sin \frac{\varphi_0}{2}$$

$$\cos \frac{\varphi_0}{2} = 0?$$

$$1 < \frac{\omega}{\omega_{\max}} = \text{ch}\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) \cdot 1$$

$$\zeta(x,t) = a e^{i(\omega t - \varphi_j)} = a e^{\pm \varphi_0 j} e^{i(\omega t - \varphi_0 j)}$$

$$\varphi_0 = \pi; \quad \zeta(x,t) = a e^{-\varphi_0 j} e^{i(\omega t - \pi j)}$$



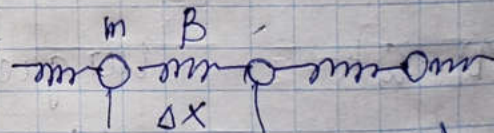
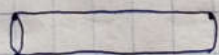
нет использованных функций?

5.11.19

9.2 Дискретизация разностной схемы

E, S

аналитическая → дискретная аналогия



$$\frac{\partial^2 \zeta(x,t)}{\partial t^2} - G^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0$$

$$\zeta(x,t) = A e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\omega(k) = G \cdot k$$

дискретизированное ур-е

$$\frac{d^2 \zeta_j}{dt^2} - G^2 \Delta^2 \zeta_j / \Delta x^2 = 0$$

$$\zeta_j(t) = A e^{i(\omega t - \varphi_j)}$$

$$\omega(k) = G k \text{sinc} \frac{k\Delta x}{2}$$

дискретизированное ур-е

Утверждение 1

Дифференциально-разностное ур-е описывает волну в ячейке.

Утверждение 2

Волна в ячейке или (гипер.-разн. ур-е) имеет дискретные дискретизированные значения.

Утверждение 3.

Условие или диф.-уравн. ур-е имеет конечную точку прозрачности / или частоту Найквиста)

$$\omega_{\max} = \omega_N = G \cdot k \frac{1}{k \cdot \frac{\Delta x}{2}} = \frac{2G}{\Delta x}$$

подставим π в

дисперсионное ур-е

метрика втч. мат-ка

расширение k

возникает когда $\frac{k \Delta x}{2} = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{2\pi}{\lambda_{\min}} \cdot \frac{\Delta x}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lambda_{\min} = \lambda_N = 2 \Delta x$$

Утверждение 4.

Дисперсия световая мала, если $\lambda \gg \lambda_N$

Утверждение 5.

Световая дисперсия значима, если $\lambda \sim \lambda_N$

Утверждение 6.

При $\omega > \omega_{\max}$ или $\lambda < \lambda_N$. Волна не входит в ячейку решетки (систему) не является λ ?

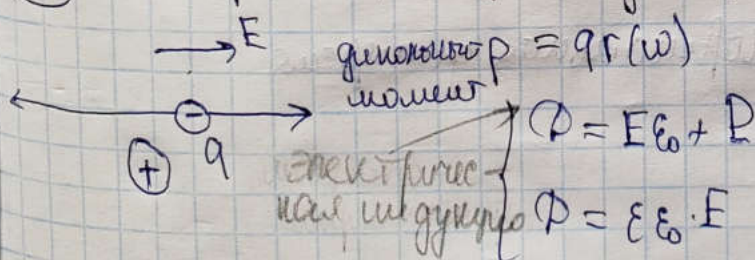
10) Внешняя дисперсия.

кажи: $n(\lambda) = 1 + A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2}\right) + \frac{C}{\lambda^4}$

тут сложнее, не следствие упрощ. дисперсии

10.1) Электронная теория дисперсии.

(Лоренц)



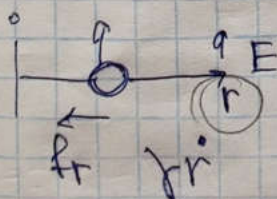
$P = q N r(\omega)$ — поляризация
 $\epsilon = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{A \cdot s}{B \cdot m}$

$$\epsilon_0 E + q N r(\omega) = \epsilon_0 E$$

$$\epsilon = \epsilon(\omega) = 1 + \frac{q N r(\omega)}{\epsilon_0 E}$$

возвращающая сила
потери энергии

$r(\omega) = ?$



$m \ddot{r} = -fr - \dot{r} + qE$
масса электрона

или со скоростью движения

уп-2
плазменный

$$\ddot{r} + \delta \dot{r} + \omega_0^2 r = \frac{qE}{m}$$

$$\omega_0^2 = \frac{f}{m}$$

$$\delta = \frac{\gamma}{m}$$

$$E = E_0 \cdot e^{i\omega t}$$

$$r(\omega) = r_0(\omega) e^{i\omega t}$$

$$r_0(\omega) = \frac{qE_0}{m} \cdot \frac{1}{-\omega^2 + i\delta\omega + \omega_0^2}$$

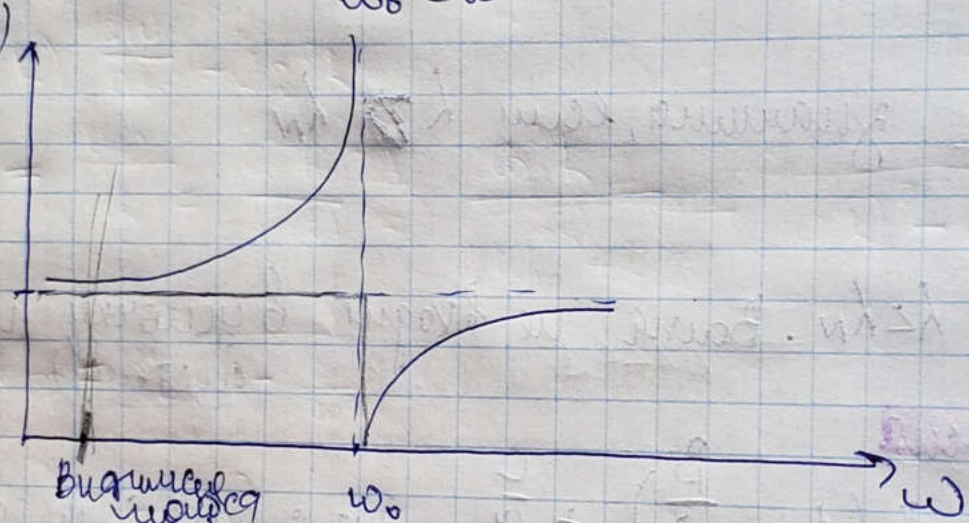
$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{Nq^2 \frac{E_0}{\epsilon_0 m}}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\delta\omega) E_0}$$

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\frac{Nq^2}{\epsilon_0 m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\delta\omega}$$

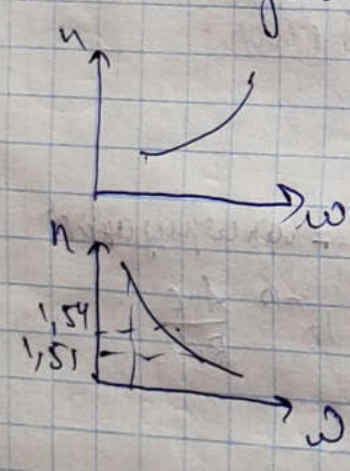
Пусть $\delta, \gamma = 0$

$$\epsilon(\omega) = n^2(\omega) = 1 + \frac{Nq^2 / (\epsilon_0 m)}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$n = \sqrt{\epsilon(\mu)}$$

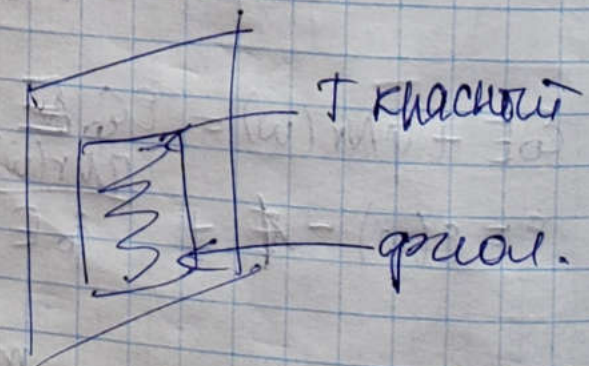
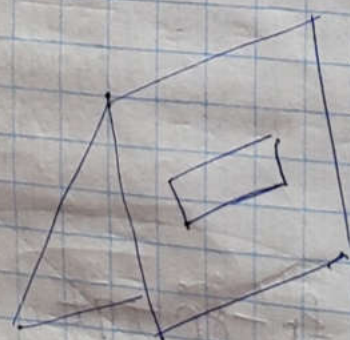


Канал это дисперсия?



$$\omega = kc_0 = \frac{2\pi}{\lambda c_0}$$

Уфиманская дисперсия



102) Аномальная дисперсия

$\delta \neq 0$

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{\frac{Nq^2}{m\epsilon_0}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\delta\omega}$$

$(i\omega)^2 = -2i\omega\omega_0$

$n'(\omega) = n(1 + i\chi)$

$$n^2(1 - \chi^2) = 1 + \frac{\frac{Nq^2}{m\epsilon_0}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \delta^2\omega^2} \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)$$

$$2n^2\chi = \frac{\frac{Nq^2}{m\epsilon_0}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \delta^2\omega^2} \cdot (\delta \cdot \omega)$$

действительная и мнимая часть

$e^{i(\omega t - kx)}$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{c(\omega) \cdot T} = \frac{2\pi \cdot n(\omega)}{c \cdot T} = k_0 n(\omega)$$

$$e^{i(\omega t - k_0 n(\omega)x)} = e^{i(\omega t - k_0 n \chi - n k_0 x)} = e^{-\chi} e^{i(\omega t - n k_0 x)}$$

$\lambda = k_0 n \chi$ - коэф. отражения

$|\omega - \omega_0| < \delta \cdot \omega$

мнимая составляющая

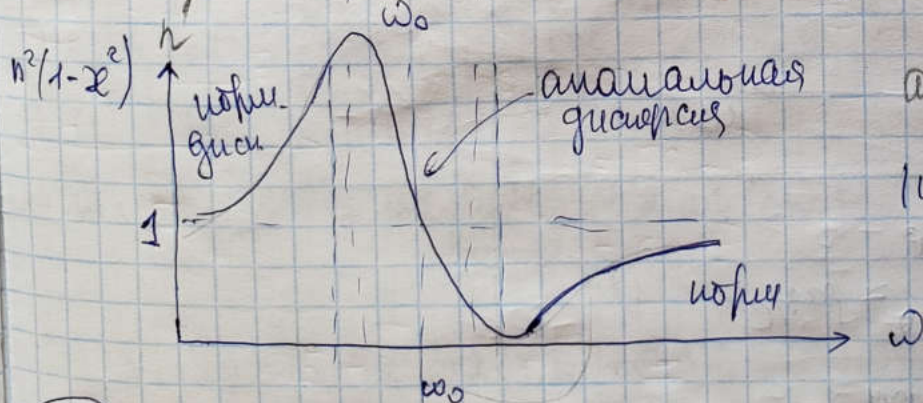
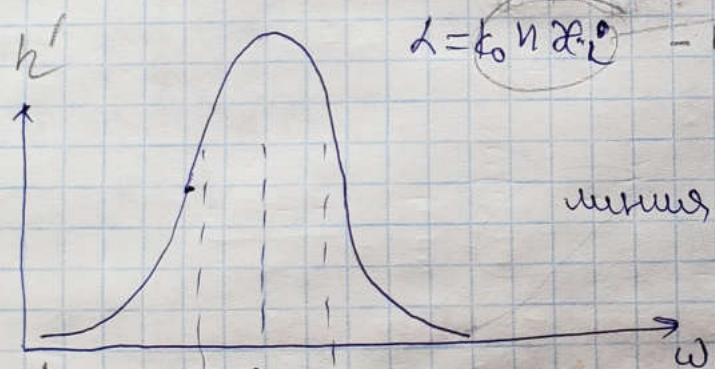
мнимая часть

коэф. т.к. растет от ω

аном. в кристалле вызывает небольшое погреш.

$|\omega_0 - \omega| < \delta \omega$

действительная часть



103) Дисперсия в плазме,

Электронот не связан в атоме

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\frac{Nq^2}{m\epsilon_0}}{(-\omega^2)} = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}; \quad \omega_{pl}^2 = \frac{Nq^2}{m\epsilon_0}$$

$\gamma = 0$

Мягкие кристаллы — фазовое состояние, в которое переходит
некоторые вещества при определенных условиях.

Принцип работы МК мониторов основывается на намеренной
связи в молекулах.

Изменяют ориентацию молекул под воздействием электри-
ческих полей.

при наложении выстраивается вдоль π -поля, разрушая
структуру кристалла.

Формулы Френеля:

$$\left(\frac{E_{or}}{E_{ug}} \right)_{\perp} = \frac{z_2 \cos \theta_{ug} - z_1 \cos \theta_{up}}{z_2 \cos \theta_{ug} + z_1 \cos \theta_{up}} = \frac{\cos \theta_{ug} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_{12}^2 - \sin^2 \theta_{ug}}}{\cos \theta_{ug} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_{12}^2 - \sin^2 \theta_{ug}}}$$

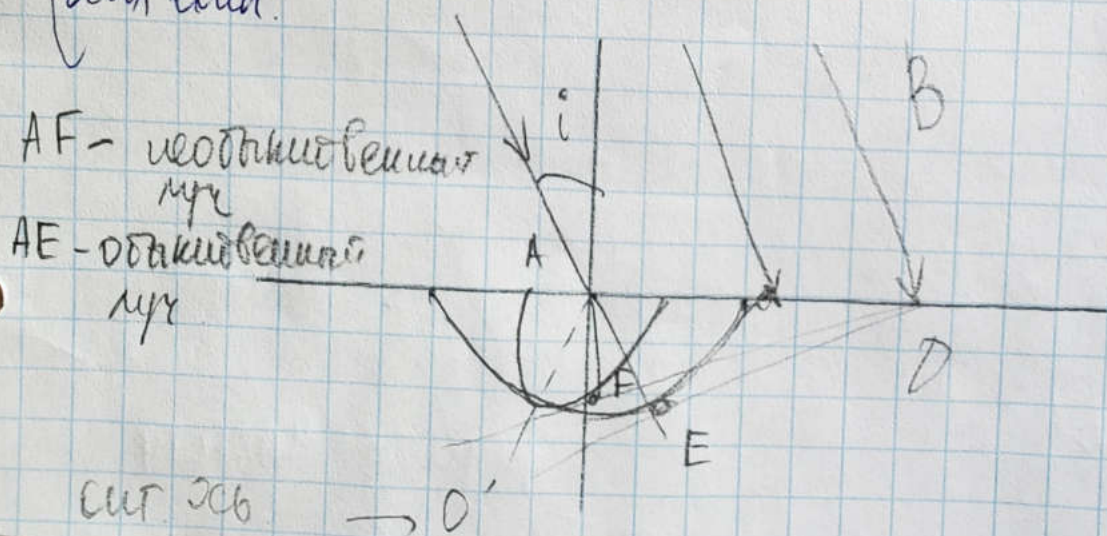
$$\left(\frac{E_{up}}{E_{ug}} \right)_{\perp} = \frac{2 z_2 \cos \theta_{ug}}{z_2 \cos \theta_{ug} + z_1 \cos \theta_{up}} = \frac{2 \cos \theta_{ug}}{\cos \theta_{ug} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_{12}^2 - \sin^2 \theta_{ug}}}$$

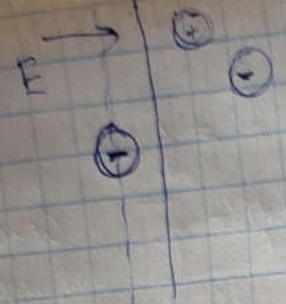
$$\left(\frac{E_{or}}{E_{ug}} \right)_{\parallel} = \frac{z_1 \cos \theta_{ug} - z_2 \cos \theta_{up}}{z_1 \cos \theta_{ug} + z_2 \cos \theta_{up}} = \frac{\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right) n_{12}^2 \cos \theta_{ug} - \sqrt{n_{12}^2 - \sin^2 \theta_{ug}}}{\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right) n_{12}^2 \cos \theta_{ug} + \sqrt{n_{12}^2 - \sin^2 \theta_{ug}}}$$

$$\left(\frac{E_{up}}{E_{ug}} \right)_{\parallel} = \frac{2 z_1 \cos \theta_{ug}}{z_1 \cos \theta_{ug} + z_2 \cos \theta_{up}} = \frac{2 n_{12} \cos \theta_{ug}}{\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right) n_{12}^2 \cos \theta_{ug} + \sqrt{n_{12}^2 - \sin^2 \theta_{ug}}}$$

Принцип Гюйгенса - Кингса

точка, до которой доходит световое возмущение, может рассматриваться как центр сфер. вторичных волн. Для определения волнового фронта распр. волн в послед. моменты времени следует построить огибающую этих вторичных волн.





$$n^2(\omega) = 1 - \frac{\omega_{nn}^2}{\omega^2}$$

$$c = \frac{c_0}{n(\omega)} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{nn}^2}{\omega^2}}}$$

$$\omega = c \cdot k$$

$$\left(\frac{\omega(k)}{k}\right)^2 = \frac{c_0^2}{1 - \frac{\omega_{nn}^2}{\omega^2}}$$

$$\omega(k)^2 - \omega_{nn}^2 = k^2 c_0^2 \quad \omega^2(k) = \omega_{nn}^2 + k^2 c_0^2$$

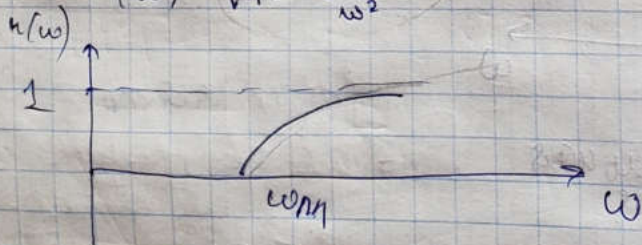
$$2\omega(k) \frac{d\omega}{dk} = 2c_0^2 k$$

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c_0^2 k}{\omega(k)} = \frac{c_0^2}{\omega(k)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{nn}^2}{\omega^2}}}$$

$$v_{gr} = c_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_{nn}^2}{\omega^2}}$$

$$v_{gr} \cdot c = c_0^2$$

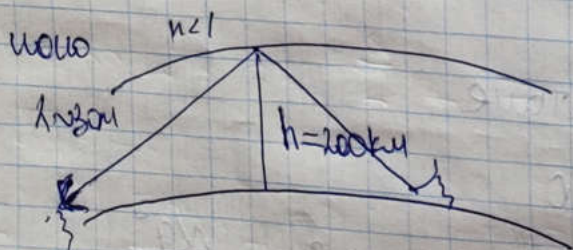
$$n(\omega) = \sqrt{1 - \frac{\omega_{nn}^2}{\omega^2}}$$



Условие: $N \sim 10^4 - 10^6 \frac{1}{\text{см}^3}$

$$\omega_{nn} = \frac{Ne^2}{m \epsilon_0} = 10^7 \text{ рад/с}$$

$$\lambda_{nn} \sim 100 \text{ нм} - 30 \text{ мкм}$$



что и имеет в основе резонанс

нормальная дисперсия

54) При $\lambda \ll \lambda_{nn}$, $\omega \gg \omega_{nn}$ $n(\lambda) = n(\omega) = 1$

Раздел IV. Интерференция волн
 Суперпозиция двух или более волн, в результате которой происходит перемещение интенсивности в пространстве.

$$I = \langle S \rangle_t$$

$$S = c \cdot \vec{w}$$

$$w \sim |\vec{z}|^2$$

$$I \sim \langle |\vec{z}|^2 \rangle_t$$

$$\tau \sim 10^{-15} \text{ c.}$$

$$w = \begin{cases} \rho V^2(t) \\ \epsilon_0 E^2(t) \end{cases}$$

$$\gamma_{\text{max}} \sim 0,1 \text{ e}$$

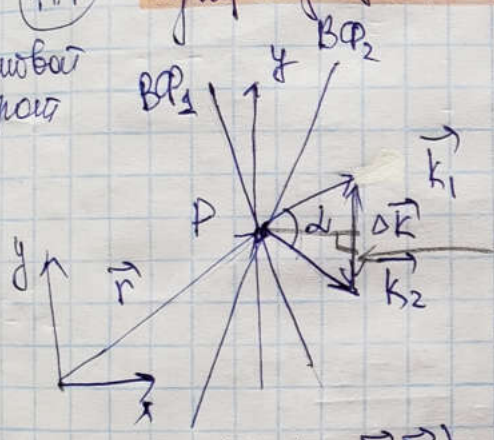
$$\tau_{\text{on}} \sim 10^{-12} \text{ c}$$

$$I_p = \langle \vec{z}_p(t) \vec{z}_p^*(t) \rangle_t - \text{интенсивность в т. наблюдении}$$

1) Двухлучевая интерференция

1.1.1) Суперпозиция плоских волн.

канонический подход



$$|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = k$$

$$\sin \frac{\alpha}{2}$$

$$|e^{i\omega t}|^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \vec{z}_p(t) &= a_1 e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r})} + a_2 e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r})} \\ I &= \langle \vec{z}_p(t) \vec{z}_p^*(t) \rangle_t = (a_1 e^{-i\vec{k}_1 \vec{r}} + a_2 e^{-i\vec{k}_2 \vec{r}}) (a_1 e^{i\vec{k}_1 \vec{r}} + a_2 e^{i\vec{k}_2 \vec{r}}) = \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 (e^{i(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \vec{r}} + e^{-i(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \vec{r}}) \\ &= I_1 + I_2 + 2 a_1 a_2 \cos(\Delta \vec{k}, \vec{r}) \end{aligned}$$

$$\Delta \vec{k} = \vec{k}_2 - \vec{k}_1$$

$$\Delta k = 2k \sin \frac{\alpha}{2} \approx k \alpha$$

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \varphi$$

радиус вектор точки p.

точка max

$$\Delta \varphi(\vec{r}_p) = (\Delta \vec{k}, \vec{r})$$

$$\Delta \varphi = 2m\pi$$

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \varphi$$

$$\Delta k \cdot \Delta y = 2\pi \quad \Delta y = \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \quad \Delta y \approx \frac{1}{\alpha}$$

$$\Delta \varphi = -(2m+1)\pi$$

$$I_p = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \varphi$$

точка min

Пусть $\vec{E} \parallel \Delta \vec{r}$
 $\Delta \varphi$

$(\Delta \vec{r}, \vec{r}) = \Delta r \cos \frac{\Delta \varphi}{2}$
 проводим r параллельно $\Delta \vec{r}$ на x и y
 тогда $\Delta K \perp x$
 $\Delta K = 2K \sin \frac{\Delta \varphi}{2}$ — y равноб. треуг.

m -го
 порядка
 $m+1$ -го
 порядка

$\Delta \varphi = 2m\pi$
 $\Delta \varphi = 2(m+1)\pi$

$\Delta K y_m = 2m\pi$
 $\Delta K y_{m+1} = 2(m+1)\pi$

$\Delta y = y_{m+1} - y_m = \frac{2\pi}{\Delta K} = \frac{2\pi}{2K \sin \frac{\Delta \varphi}{2}}$

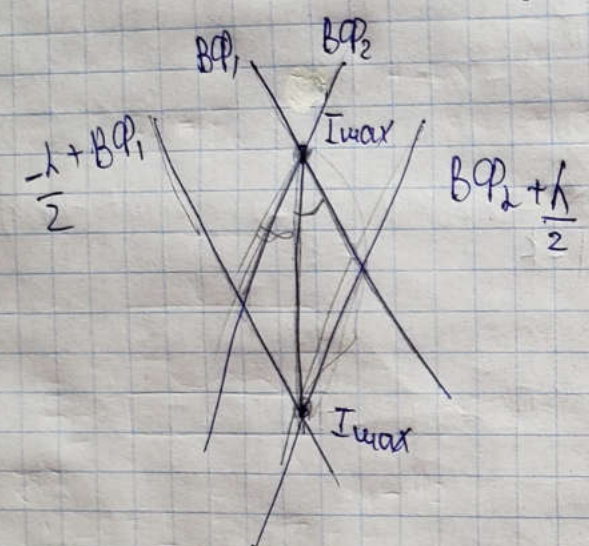
$K = \frac{2\pi}{\lambda}$
 $\Delta y = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2}}$
 $\Delta y = \frac{\lambda}{2}$

расстояние между
 соседними максимумами
 (минимумами)

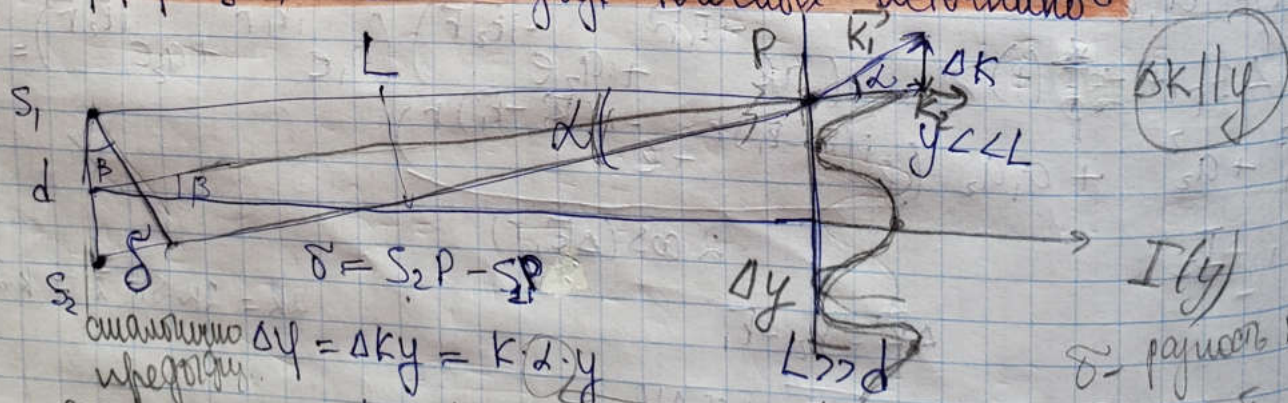
интерференционный
 порядок на экране

Если

$\Delta \ll \lambda$



11.2 Интерференция волн от двух точечных источников



$\Delta \varphi = \Delta K y = K \cdot d \cdot y$
 разность $y = \tan \beta \cdot L = L \cdot \beta$

$\Delta K \cdot y = \Delta \varphi = K d \cdot L \cdot \beta = K \frac{d}{L} L \cdot \beta = K d \cdot \beta \approx \delta \cdot K$
 $\Delta \varphi = K \delta$

$\Delta \varphi = 2m\pi \Rightarrow$

$2m\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$
 $\delta = 2m \frac{\lambda}{2}$

$d\beta \approx \delta$

δ — разность

максимум

$I_p - \text{max}$

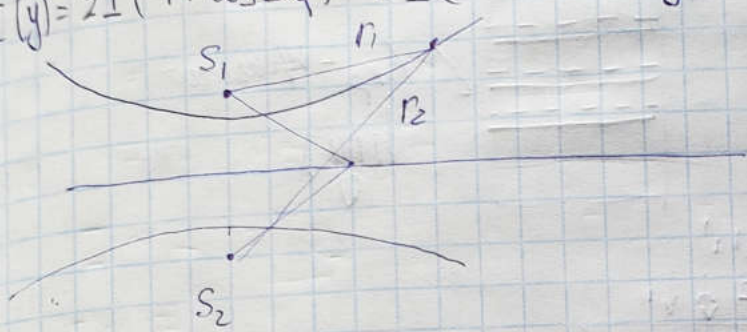
$$\Delta \varphi = (2m+1)\pi$$

$$\delta = (2m+1) \frac{\lambda}{2}$$

минимум

$$I_1 = I_2$$

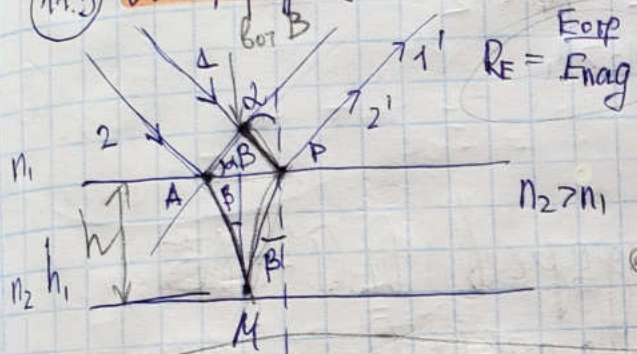
$$I(y) = 2I \left(1 + \cos \Delta \varphi \right) = 2I \left(1 + \cos \frac{k \cdot d}{L} \cdot y \right)$$



эквипотенциальной интерференции

11.3 Интерференция в тонких пленках

в ТР происходит наложение двух волн



$$R_E = E_{\text{refl}} = E_{\text{tr}} \cdot \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$$

$$\vec{E}_{1B} = a e^{i\omega t}$$

$$\vec{E}_{2A} = a e^{i\omega t}$$

$$\vec{E}_{1P} = a e^{i(\omega t - k_1 BP)}$$

$$\vec{E}_{2P} = a e^{i(\omega t - k_1 BP - \frac{k_2 \lambda}{2})}$$

волна проходит через пленку -1π
-1 = e^{-iπ}

$$\vec{E}_{2P} = a e^{i(\omega t - k_2 (AM + MP))}$$

применяем теорему

$$\Delta ABP : BP = AP \cdot \sin \alpha = 2h \tan \beta \cdot \sin \alpha$$

$$\Delta AMP : AM = MP = \frac{h}{\cos \beta}$$

применяем теорему

$$k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{2\pi}{\frac{\lambda_1}{n_2}} = \frac{2\pi}{\lambda_1} \cdot n_2 = k_1 \cdot n_2$$

в вакууме $k_1 = k \cdot n_1$

$$\Delta \varphi_P = [k_2 (AM + MP) - (k_1 BP + \frac{\lambda}{2} k_1)] = k [n_2 \cdot \frac{2h}{\cos \beta} - n_1 \cdot 2h \tan \beta \sin \alpha - n_1 \frac{\lambda}{2}]$$

аргумента и эквивалентно

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$$

$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot \sin \beta$$

рассчитать tg

$$\Delta \varphi_P = k \cdot 2h \cdot n_2 \left(\frac{1}{\cos \beta} - \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta} \right) - n_1 \frac{k \lambda}{2}$$

$n_1 = 1$ потому что вакуум

$$\Delta \varphi_P = k \cdot 2h \cdot n_2 \cos \beta - n_1 \frac{k \lambda}{2}$$

$$\Delta \varphi_P = k \cdot \delta_P$$

$$\delta_P(h, \beta(\lambda)) = 2h n_2 \cos \beta - \frac{\lambda}{2}$$

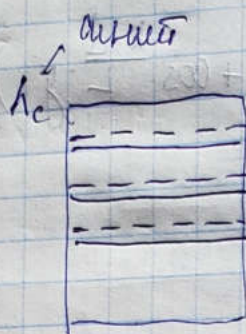
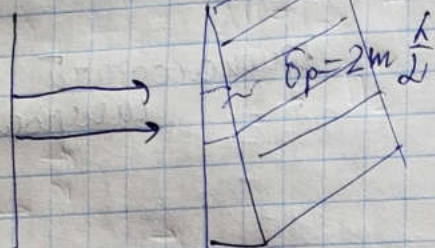
разность хода

Если λ - const и β - const

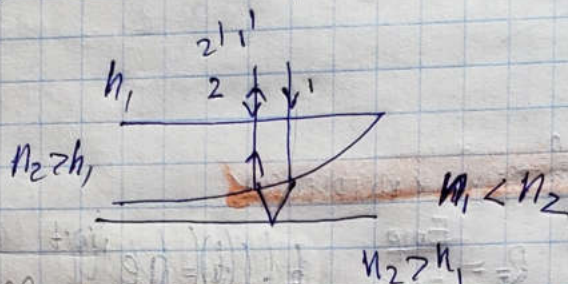
h - толщина пленки

$$\delta_p = f(h) = 2 \cdot h n_2 \cos \beta - \frac{\lambda}{2}$$

$\delta_p = 2m \frac{\lambda}{2} \rightarrow \max I_p$, при $h = \text{const}$
 минимальная интенсивность
 при разности толщин



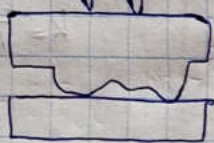
$h_{кр}$ - критическая
 $h(y)$



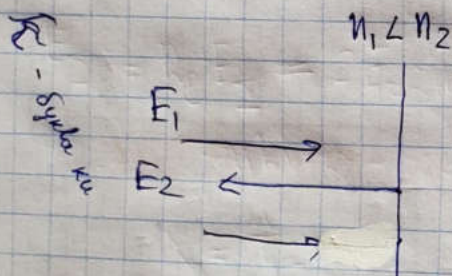
концентрация вещества



сформировано в центре темное пятно
 от интерференции света между пленкой и поверхностью
 под ней



уменьшение
 стабильности



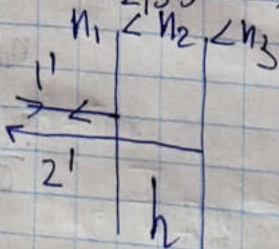
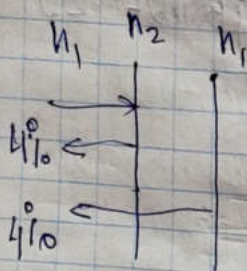
$$R_E = \frac{E_2}{E_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

$$R_I = \frac{I_{отр}}{I_{пад}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_2 E_2^2}{\epsilon_0 \epsilon_1 E_1^2} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

$n_1 = 1$ $n_2 = 1,5$

$$R_I = \left(\frac{0,5}{2,5} \right)^2 = 0,04$$

Френелевское отражение



$$\Delta \varphi_{i'2'} = \pi; 3\pi$$

$$\delta = 2h n_2$$

$$\Delta \varphi = \delta \cdot k = 2h \cdot n_2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = 0$$

$$h = \frac{\lambda}{4n_2}$$

(58) $\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$

$$\frac{I_2}{I_0} = \left(\frac{n_3 - n_2}{n_3 + n_2} \right)^2$$

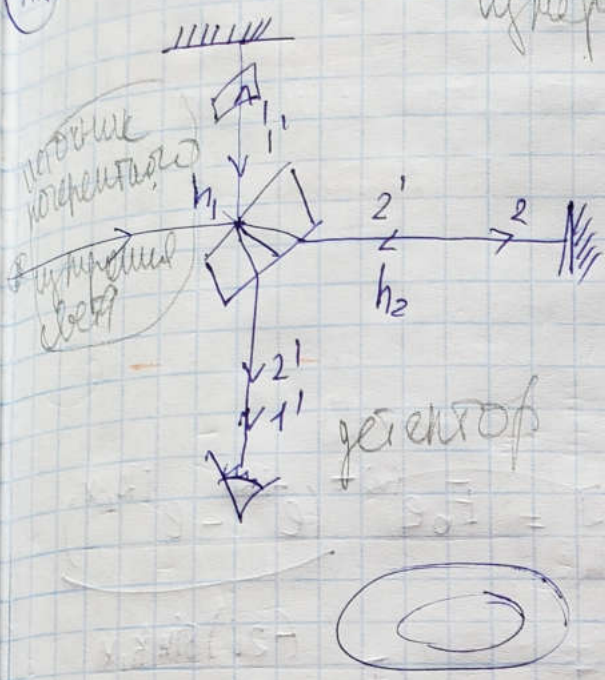
$I_1' = I_2' \Rightarrow$
 отсутствие просветления
 а-минимум $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$
 n -const

$\sigma_p = f(L)$

11.4 Интерферометр Майкельсона

измерить длину волны света

по интерференционной картине измерить длину волны



$\delta = k(h_2 - h_1), \Delta h \sim \frac{\lambda}{4}$

минимум максимума

$\lambda = 0.5 \text{ мкм}$

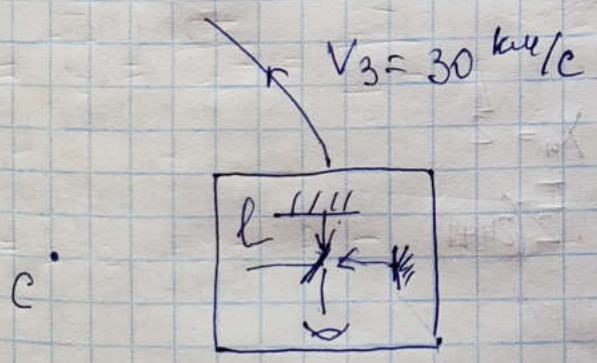
$\Delta h \sim 0.1 \text{ мкм}$

$1 \text{ метр} = 3 \text{ туга} = 5,84 \text{ м}$

$1 \text{ туга} = 6 \text{ мс}$

$1 \text{ метр} = 0,25 \cdot 10^{-7} \text{ L}$ меридиана в Париже

1881



наб. волно-излучения
наб. поле

$2T_{||} = \frac{2l}{c} (1 + \beta^2)$

$\beta = \frac{V_3}{c}$

лазерно-интерферометрическая гравитационно-волновая обсерватория

$2T_{\perp} = \frac{2l}{c} (1 + \frac{1}{2}\beta^2)$

главная задача LIGO - измерение гравитационных волн - космического происхождения

Большой интерферометр

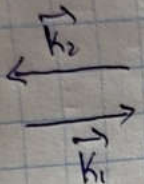
LIGO: 2016

11.5) Стоячие волны

$$|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = k$$

$$\Delta y = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

↑ расстояние между соседними максимумами

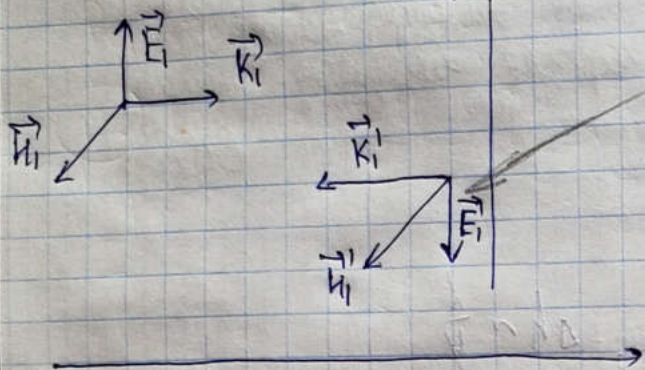


$$\alpha = \pi$$

$$\Delta y = \frac{\lambda}{2} - \text{стоячая волна}$$

$$n_1 < n_2$$

отраженная волна



$$E_1 + E_1' = E_0 [e^{i(\omega t - k_1 x)} + e^{i(\omega t + k_1 x)} (-1)] = E_0 e^{i\omega t} (e^{-ik_1 x} - e^{ik_1 x})$$

раскладываем на действительную и мнимую часть

$$E_2 = 2E_0 e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} \cdot \sin k_1 x$$

$$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$E_{2m} = Re E_2 = 2E_0 \sin \omega t \sin k_1 x$$

Узлы: $\sin k_1 x = 0$

$$k_1 x = \pi \cdot n$$

$$x_n = \frac{\lambda}{4} 2n$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} x_n = \pi \cdot n$$

максимальная амплитуда

Пучность

$$\sin k_1 x = 1$$

$$x_n = \frac{\lambda}{4} (2n+1)$$

$$\Delta x = x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{2}$$

$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2} (2n+1)$$

Макс.

$$\sin \omega t = 1$$

$$\frac{2\pi}{T} t_m = \pi \cdot m$$

$$\omega t = \pi \cdot m$$

$$t_m = \frac{T}{4} \cdot 2m$$

$$H_2 = 2k_0 \cos \omega t \cos k_1 x$$

Узел для H

$$x_p = \frac{\lambda}{4} (2n+1)$$

Пучность для H

$$x_q = \frac{\lambda}{4} 2n$$

минимальная амплитуда



12. Когерентность

12.1 Условия возникновения интерференции

- Монохроматическое излучение

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \varphi$$

$$\Delta \varphi = k \delta$$

$$\Delta \varphi = \frac{m \cdot 2\pi}{\lambda} \quad I_p > I_1 + I_2$$

$$\Delta \varphi = (2m+1)\pi \quad I_p < I_1 + I_2$$

$$I_p = \langle (\xi_1(t) + \xi_2(t)) \cdot (\xi_1^*(t) + \xi_2^*(t)) \rangle_t = \langle \xi_1 \xi_2^* \rangle_t + \langle \xi_1 \xi_1^* \rangle_t + \langle \xi_2 \xi_2^* \rangle_t + \langle \xi_2 \xi_1^* \rangle_t = I_1 + I_2 + 2 \cdot \text{Re} \langle \xi_1 \xi_2^* \rangle_t$$

- Вобщем $I_p = I_1 + I_2 + 2 \text{Re} \langle \xi_1 \xi_2^* \rangle_t$

Если $\text{Re} \langle \xi_1 \xi_2^* \rangle_t = 0$, то $I_p = I_1 + I_2$ интерференции нет

Если $\text{Re} \langle \xi_1 \xi_2^* \rangle_t \neq 0$, то $I_p \neq I_1 + I_2$ интерференция есть

Интерференция квазимонохроматических волн

$$\xi_1(t) = a_1 e^{i(\omega t + \varphi_1(t))}$$

$$\xi_2(t) = a_2 e^{i(\omega t + \varphi_2(t))}$$

применение графы малю
усреднение

Квазимонохром означает:

$$\frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial t} T \ll \varphi_{1,2} \quad (\text{на периоде})$$

$$I_p = I_1 + I_2 + 2 \text{Re} \langle a_1 a_2 e^{i(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))} \rangle_t =$$

$$2a_1 a_2 \langle \text{Re} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \rangle_t$$

$$2a_1 a_2 \langle \cos \Delta \varphi \rangle_t$$

$$\Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

- Квазимонохроматические волны

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \Delta \varphi \rangle_t$$

$$\langle \cos \Delta \varphi(t) \rangle_t = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 d\varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) P(\varphi_1, \varphi_2)$$

Если $\psi_{1,2}(t)$ - статистически стационарные,
статистически независимы, то

$$P(\psi_1, \psi_2) = P(\psi_1) P(\psi_2)$$

$$P(\psi_1) = P(\psi_2) = \frac{1}{2\pi}$$

$$\langle \cos \Delta \psi(t) \rangle_t = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi_1 d\psi_2 \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \cos(\psi_1 - \psi_2) = 0$$

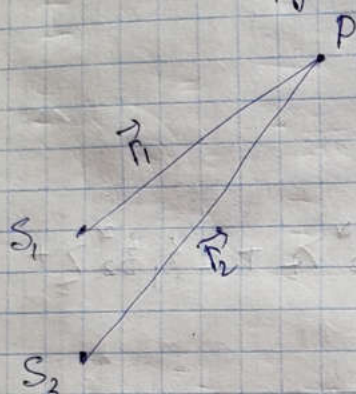
Коэффициент разности фаз
постоянна
при одинаковых колебаниях
наименьшее колебание то
и частота

Резюме: интерференция не, важно не когерентность или стат. независимость

(12.2) Когерентность и видимость интерференционной картины

Ввести меру когерентности.

интерференционные



$$\xi_{1S} = a_1 e^{i\omega t}$$

$$\xi_{1S}(t - t_1)$$

$$\xi_{2S} = a_2 e^{i\omega t}$$

$$\xi_{1P} = a_1 e^{i\omega(t - \frac{r_1}{c})}$$

$$= a_1 e^{i\omega(t - t_1)}$$

$$\xi_{2P} = a_2 e^{i\omega(t - \frac{r_2}{c})}$$

$$= \xi_{2S}(t - t_2)$$

$$I_P = I_1 + I_2 + 2 \operatorname{Re} \langle \xi_1 \xi_2^* \rangle_t = I_1 + I_2 + 2 \operatorname{Re} \langle \xi_{12}(t - t_1) \xi_{2S}^*(t - t_2) \rangle_t$$

$$t - t_2 = t'$$

$$t - t_1 = t' + \tau$$

$$2 \operatorname{Re} \langle \xi_{1S}(t' + \tau) \xi_{2S}^*(t') \rangle_t$$

$$\tau = \delta t_2 - \delta t_1 = \frac{r_2 - r_1}{c}$$

Рассмотрим статистически стационарные

$$\Gamma_{12}(t, \tau)$$

$$I_1 = \langle \xi_1 \xi_1^* \rangle_t = \langle \xi_1 \xi_1^* \rangle_{\text{ансамбль}} = \text{const}$$

ф-я взаимной

$$\Gamma_{12}(t, \tau) = \langle \xi_1(t + \tau) \xi_2^*(t) \rangle_{\text{ансамбль}} = \Gamma_{12}(t)$$

когерентности

то такое усреднение по ансамблю:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\xi_1^{(n)}(t))^2 = I \text{ const}$$

Возьмем две функции, $\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_2^{(n)}$

$$I_P = I_1 + I_2 + 2 \operatorname{Re} \Gamma_{12}(\tau)$$

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle \xi_1(t + \tau) \xi_2^*(t) \rangle_t$$

Возьмем

$$I_P = I_1 + I_2 + 2 \operatorname{Re} \Gamma_{12}(\tau)$$

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle \xi_1(t + \tau) \xi_2^*(t) \rangle_t$$

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re} \gamma_{12}(\tau)$$

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}} \Gamma_{12}(\tau) - \text{степень когерентности.}$$

или

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re} \gamma(\tau)$$

$$\gamma(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1 I_2}} - \text{степень когерентности.}$$

Если $\operatorname{Re} \gamma_{12}(\tau) > 0$, то $I_p > I_1 + I_2$ — максимум

$\operatorname{Re} \gamma_{12}(\tau) < 0$, то $I_p < I_1 + I_2$ — минимум

Квадратичная

Квадратичная когерентность.

$$\xi_1(t) = a_1(t) e^{i\omega t}$$

$$\xi_2(t) = a_2(t) e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial t} T \ll a_{12}$$

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re} \gamma_{12}(\tau)$$

$$I_1 = a_1^2$$

$$\operatorname{Re} \gamma_{12}(\tau) = \operatorname{Re} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \xi_1(t+\tau) \xi_2^*(t) dt}{\sqrt{I_1 I_2}} = \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} a_1(t+\tau) a_2(t) e^{i\omega(t+\tau)} e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} a_1(t+\tau) a_2(t) dt e^{i\omega\tau} \quad \text{так как}$$

мнимая часть

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma(\tau)| \operatorname{Re} e^{i\omega\tau}$$

Введем разность

$$\cos \omega\tau = \cos \Delta\varphi$$

разность фаз

$$\omega\tau = \Delta\varphi = \omega(t_2 - t_1) = \omega \left(\frac{r_2 - r_1}{c} \right) = \omega \frac{\delta}{c} = k \cdot \delta$$

$$\text{Если } \omega\tau = \Delta\varphi = 2\pi n \text{ или } \delta = 2\pi n \frac{c}{\omega}, \text{ то } \cos \Delta\varphi = +1$$

Интерф. максимум

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma(\tau)|$$

$$\text{Если } \omega\tau = \Delta\varphi = (2m+1)\pi; \quad \delta = (2m+1) \frac{\lambda}{2}, \text{ интерф. минимум}$$

$$I_p = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma(\tau)|$$

Пусть $I_1 = I_2 = I$ *векторы*

если $I_1 \neq I_2$

$$V = 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |\gamma(\tau)|$$

$$I_p^{\max} = 2I(1 + |\gamma(\tau)|)$$

$$I_p^{\min} = 2I(1 - |\gamma(\tau)|)$$

видимость интерференции

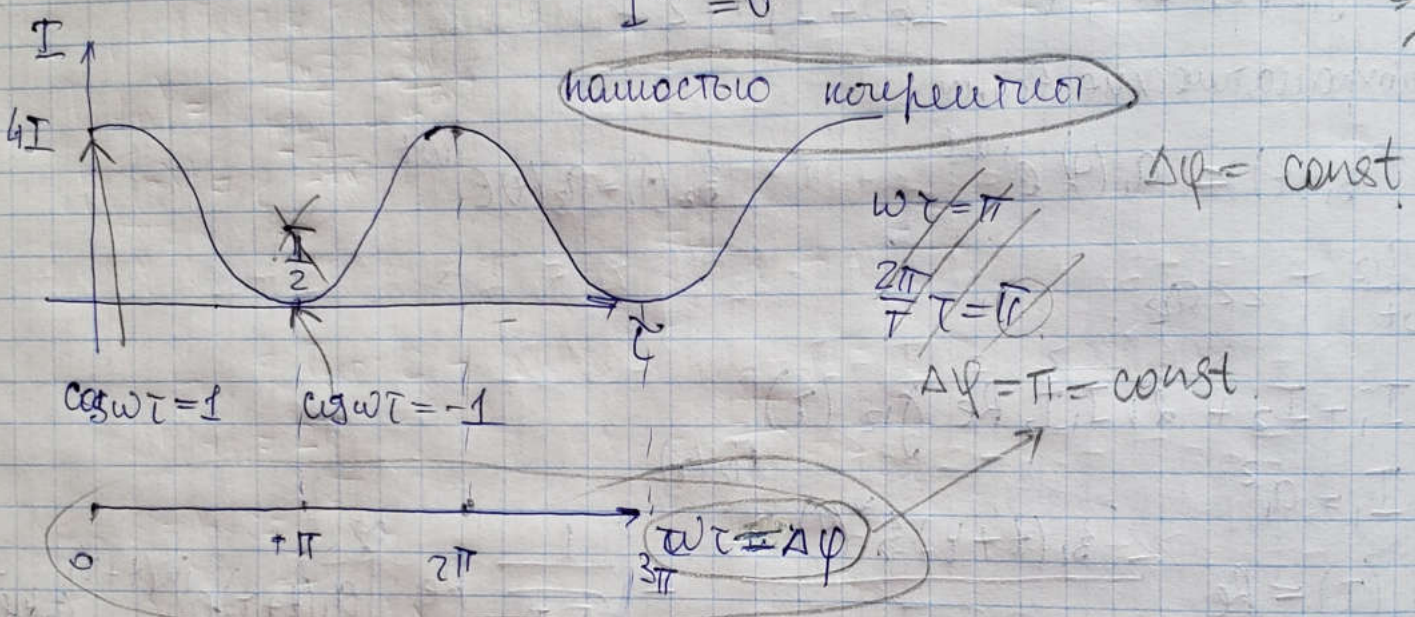
$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} =$$

$$\frac{2I \cdot 2|\gamma(\tau)|}{4I} = |\gamma(\tau)| = \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}} \operatorname{Re} \int_0^\infty \alpha_1(t+\tau) \alpha_2(t) dt$$

видимость

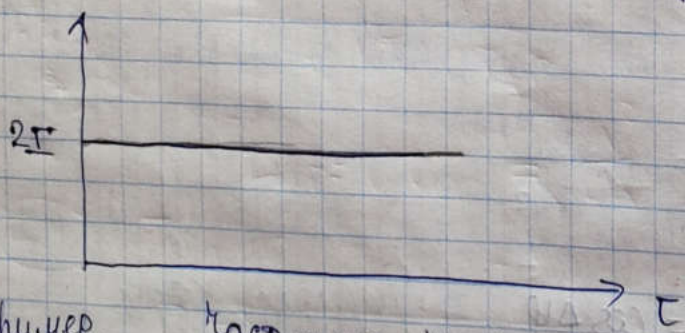
Пример: $|\gamma(\tau)| = 1 \Rightarrow I_{\max} = 4I$
 $I_{\min} = 0$

$2I_{\min} = 0$
 $I_{\max} = 2I(1 + |\gamma|) = 4I$



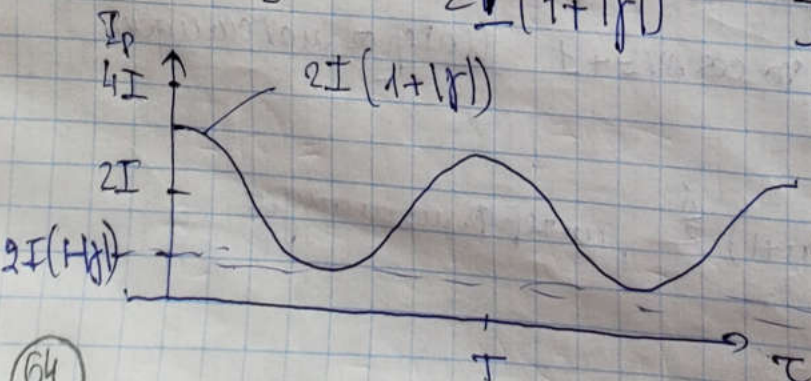
Пример: $|\gamma(\tau)| = 0$ $I_{\max} = I_{\min} = 2I$

полностью некогерентно, интерференция нет
неразрешимый свет



Пример: *частично когерентное*
 $I_{\max} = 2I(1 + |\gamma|)$

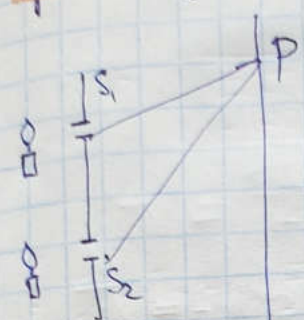
$0 < |\gamma(\tau)| < 1$
 $I_{\min} = 2I(1 - |\gamma|)$



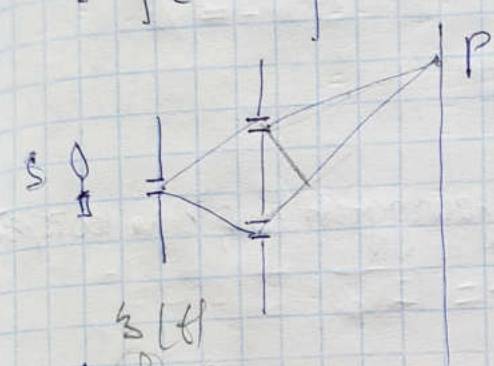
полностью некогерентно

12.3) Время и длина когерентности

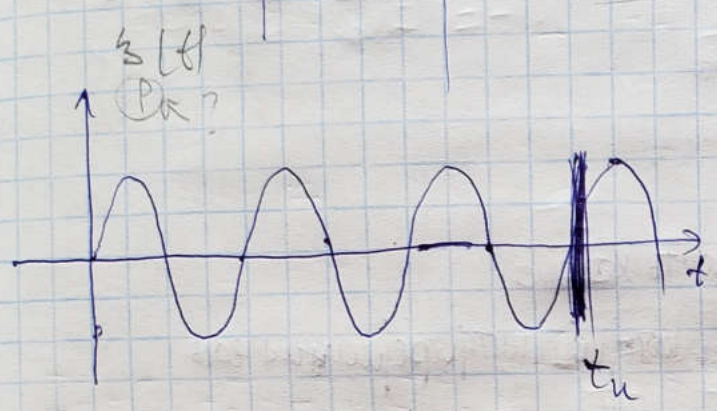
Дл. когерентности не может быть интерференции



Источники не когерентны
Интерференции нет.



S_1 и S_2 - когерентны
интерференция есть
схема Юнга.



Темп $\sim 10^{-8} \div 10^{-9} \text{ } ^\circ\text{C}$
 темп $\sim 10^{-1} \div 10^2 \text{ } ^\circ\text{C}$

$$\xi_1(t) = a(t) e^{i\omega t}$$

$$\xi_{2p}(t') = a_2(t') e^{i\omega t'}$$

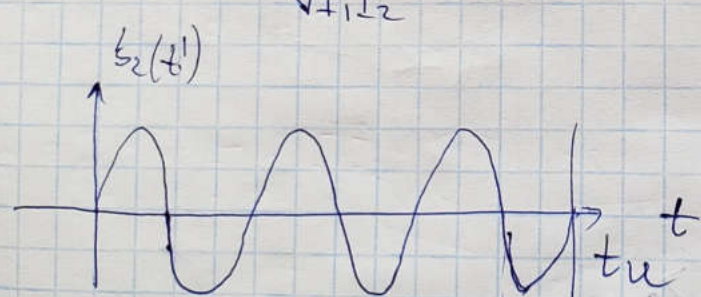
$$\xi_{1p}(t') = a_1(t + \tau) e^{i\omega(t + \tau)}$$

$$r(\tau) = \frac{\langle \xi_{1p}(t + \tau) \xi_{2p}^*(t') \rangle_t}{\sqrt{I_1 I_2}}$$

$$a(t) = \begin{cases} a_0, & 0 < t < t_n \\ 0, & t > t_n \end{cases}$$

$$\tau = \frac{S_{2p} - S_{1p}}{c}$$

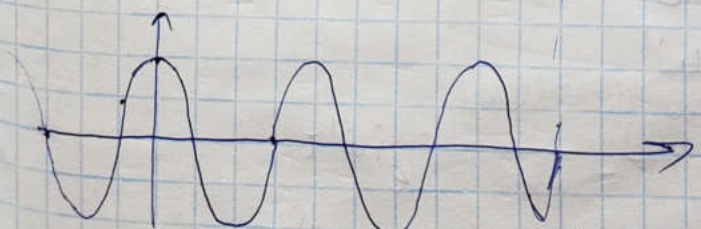
- степень когерентности



$$r(\tau) = \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}} \langle \xi_1(t + \tau) \xi_2^*(t) \rangle_t =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}} \cdot \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} a_1(t + \tau) a_2(t) e^{i\omega \tau} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}} a_0^2 \frac{t_k - \tau}{t_k} e^{i\omega \tau}; I_1 = I_2 = a_0^2$$



$$r(\tau) = \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}} \cdot \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} a_1(t + \tau) a_2(t) dt e^{i\omega \tau}$$

$a_1 a_2(t_n - \tau)$

$$y(\tau) = \frac{t_u - \tau}{t_u} e^{i\omega\tau} = \left(1 - \frac{\tau}{t_u}\right) e^{i\omega\tau}$$

$$|y(\tau)| = 1 - \frac{|\tau|}{t_u}$$



Время когерентности t_k — максимальное время задерживания, при котором

существует интерференция

$$\varphi(t_u) = \frac{t_u}{2t_u} e^{-\frac{t_u}{2t_u}}$$

$$|y(\tau)| = e^{-\frac{\tau}{t_u}}$$

?

Длина когерентности

$L_{\text{кор}} = \tau_{\text{кор}} \cdot c$ — макс. б. $\tau_{\text{кор}}$ — время когерентности

част. ω

$$\Delta\omega t_u = 2\pi$$

$$\omega = k \cdot c = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot c$$

$$|\omega| = \frac{2\pi}{\lambda^2} c \Delta\lambda$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c \tau_{\text{кор}}}$$

$$L_{\text{кор}} = c \tau_{\text{кор}} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

разность хода

при которой интерференция есть

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{t_u} = \tau_{\text{кор}}$$

раз. б. формула, там же формула

раз. б. где максимум минимума

разность пути б. в фазе

чем фазе фаз, тем

меньше длина когерентности

$$t_k \ll$$

канал. то же

(12.4)

Теорема Винера-Хинчина

$$\Gamma(\tau) = \langle \xi_1(t+\tau) \xi_2^*(t) \rangle_{\text{авс}}$$

$$\xi_1(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega') e^{i\omega'(t+\tau)} d\omega'$$

у-за комплексности

$$\xi_2^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_2(\omega'') e^{-i\omega''t} d\omega''$$

$$\Gamma_{12}(\tau) = \iint d\omega' d\omega'' \langle S_1(\omega') S_2^*(\omega'') \rangle e^{i(\omega' - \omega'')\tau}$$

$$\langle S_1(\omega') S_2^*(\omega'') \rangle \sim \delta(\omega' - \omega'')$$

есть условие $\omega' = \omega''$

(66)

$$\Gamma_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' G(\omega') e^{i\omega'\tau} d\omega'$$

свернувшаяся интерференция

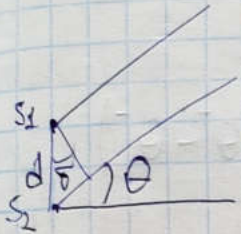
где $S_1(\omega) = S_2(\omega)$ $\omega' = \omega$

$$G(\omega) = 2\pi S(\omega) S^*(\omega)$$

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{12}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

13) Многочислая интерференция

13.1) Нахождение laws отклонения источников

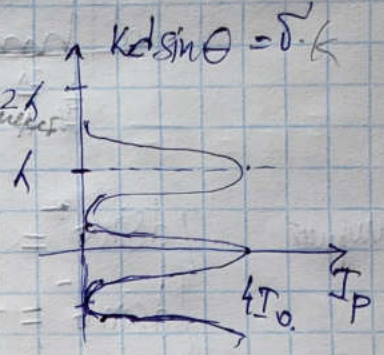


$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi$$

$$I_1 = I_2 = I_0$$

$$\varphi = k \cdot \delta = k \cdot d \sin \theta$$

$$I_p = 2I_0 (1 + \cos \varphi) = 4I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$



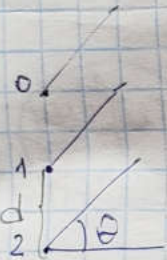
то условие
раст. максимум

$$k d \sin \Delta \theta = 2\pi$$

$$k d \cdot \Delta \theta \approx 2\pi$$

максимум

$$\Delta \theta = \frac{2\pi}{k d} = \frac{\lambda}{d}$$



$$z_0(x,t) = a e^{i(\omega t - kx_0)}$$

$$z_1(x,t) = a e^{i(\omega t - kx_0 - \varphi)}$$

$$z_n(x,t) = a e^{i(\omega t - kx_0 - \varphi \cdot n)}$$

$$\varphi = k \frac{\delta}{d} \sin \theta$$

$$z_p(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} a e^{i(\omega t - kx_0 - \varphi \cdot n)} = a e^{i(\omega t - kx_0)} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\varphi n} = a e^{i(\omega t - kx_0)} \frac{1 - e^{-i\varphi N}}{1 - e^{-i\varphi}} = a e^{i(\omega t - kx_0)} \frac{e^{-i\varphi \frac{N-1}{2}} \sin \frac{\varphi N}{2}}{e^{-i\varphi \frac{1}{2}} \sin \frac{\varphi}{2}}$$

$$I_p(\varphi) = a^2 \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

снова по Теореме

$$\frac{\varphi}{2} = \pi \cdot m \quad m = 0, 1, \dots$$

$$\varphi = 2\pi m$$

$$k\delta = 2\pi m \quad \delta = 2m \frac{\lambda}{2}$$

Фурье - спектры спектров.

Применяемый оптический шумовый и для трех. мм.

вычисляется от волнового пакета а в том же времени. Р-8

и нот. Вилера - Хинчина строится в обрат. Фурье.

И для Гаусса точно так же.

I_p - максимум $I_p = N^2 I_0 = N^2 \cdot I_0$

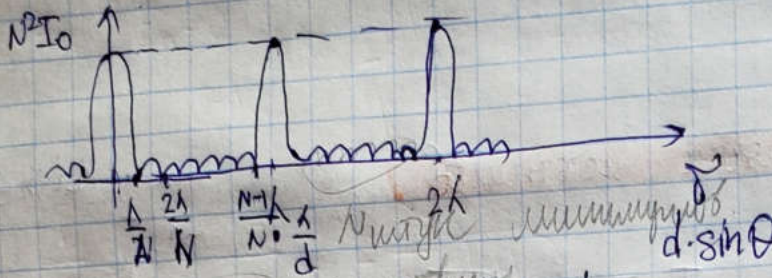
$\frac{N\lambda}{2} = \pi \cdot q$ $q = 1, 2, \dots, N-1, N+1$

I_p - минимум $I_p = 0$

$q \neq N \cdot p$

$\frac{K \cdot N d \sin \theta}{2} = \pi$

$d \sin \theta = \frac{\lambda}{N}$



минимум $d \sin \theta^+ = \frac{\lambda}{N}$ $\theta^+ = \frac{\lambda}{Nd}$
 $d \sin \theta^- = -\frac{\lambda}{N}$ $\theta^- = -\frac{\lambda}{Nd}$

$\Delta \omega \cdot \Delta t = 2\pi$ - теорема о ширине спектра.

$\frac{2\pi}{\lambda} = k$

$\Delta \theta = \frac{2\pi}{k \cdot Nd} = \frac{2\pi}{kNd}$

$(\Delta \theta \cdot k) \cdot (Nd) = 2\pi$

ширина част. спектра

плотность решетки

переносим теорему о ширине спектра на ширину частоты
 чем гуще решетка, тем уже спектр макс

13.3 Спектральное прибор



$m\lambda'$
 $m\lambda' = m\lambda + \frac{\lambda}{N}$

$\lambda' - \lambda = \frac{\lambda}{mN}$

$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{1}{mN}$

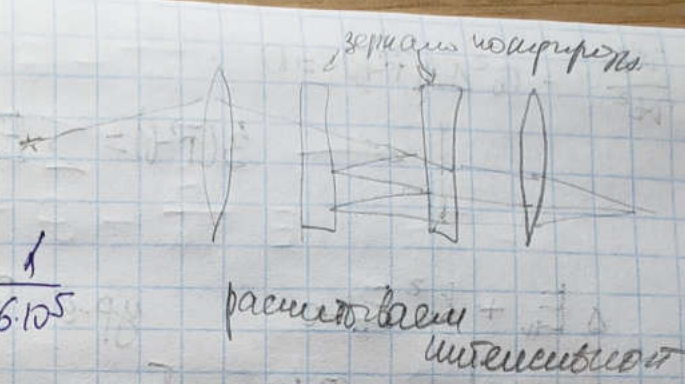


$$N \approx 30 \quad h = 5 \text{ мкм} \quad m = \frac{2h}{\lambda}$$

$$m = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 10^{-6}} = 20 \cdot 10^3 = 2 \cdot 10^4$$

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{1}{30 \cdot 10^4} = \frac{1}{6 \cdot 10^5}; \quad \Delta \lambda = \frac{1}{6 \cdot 10^5}$$

$$\text{при } \lambda = 0,5 \text{ мкм} \quad \Delta \lambda = 10^{-6} \text{ мкм.}$$



Раздел V. Дифракция.

Отклонение распространения волн от прямолинейного, которое не объясняется отражением или распр. в среде с переменным показателем преломления, которое не объясняется законами геом. оптики.

(14.1) Математическая постановка

$$\frac{\partial^2 \zeta(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - c^2 \Delta \zeta(\vec{r}, t) = 0 \quad \vec{r} \in \Omega$$

$$\zeta(\vec{r}, t)|_{\vec{r} \in \Sigma} = \zeta'(\vec{r}, t)$$



задача Коши

$$\frac{\partial \zeta}{\partial n}(\vec{r}, t)|_{\vec{r} \in \Sigma} = f(\vec{r}, t)$$

$$\zeta(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(\vec{r}) e^{i \omega_n t}$$

$$\text{уравнение Гельмгольца} \quad \Delta E_n + k_n^2 E_n = 0 \quad k_n = \frac{\omega_n}{c}$$

Скалярная теория дифракции.

(14.2) Интеграл Гельмгольца - Кирхгофа

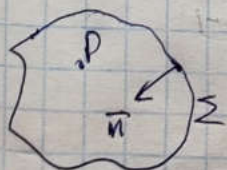
$$\Delta G + k^2 G = 0$$

$$\text{р-л Грина} \quad G = \frac{e^{i k r}}{r}$$

Формула Грина

$$\int_{\Omega} (E \Delta G - G \Delta E) d\Omega = - \oint_{\Sigma} \left(E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n} \right) d\Sigma$$

на границах области.



$$E(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \left(E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n} \right) d\Sigma$$

формула Кирхгофа

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \Delta \zeta(\vec{r}, t) = 0$$

$$\zeta(\vec{r}, t) = \sum E_n(\vec{r}) e^{i\omega_n t}$$

$$\Delta E_n + k_n^2 E_n = 0$$

уравнение Гельмгольца

Функция

$$G = \frac{e^{-ikr}}{r}$$

$$E(p) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \left(E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n} \right) d\Sigma$$

← условие излучения

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n} \right) = 0$$

$$E(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{\text{отб.}}} \left(E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n} \right) d\Sigma_{\text{отб.}}$$

$\Sigma_{\text{отб.}}$

→ приближение Кирхгофа

$$E(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{\text{отб.}}} \left(E_s(M) \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E_s(M)}{\partial n} \right) d\Sigma_{\text{отб.}}$$

$$E(p) = \frac{ik}{4\pi} \int_{\Sigma_{\text{отб.}}} E_s(M) (\cos \alpha - \cos \beta) \frac{e^{-ikr}}{r} d\Sigma$$

↓ оптическое приближение, $\lambda \ll R, r, |ik| \gg \frac{1}{R}, \frac{1}{r}$

интеграл Френеля - Кирхгофа

для Френеля для приближенного вычисления

интеграл Ф-к

$$E(p) = \sum_{n=0}^N E_n \quad E_n = E_0 \frac{e^{-ik(r_0+p)}}{r_0+p} k_n (-1)^{n-1}$$

$$A(x, y, t) = \frac{ik}{2\pi z} \int A(x', y') e^{-\frac{ik}{2z} [(x-x')^2 + (y-y')^2]} dx' dy'$$

↓ интеграл Френеля

$$D \ll \sqrt{\lambda z}$$

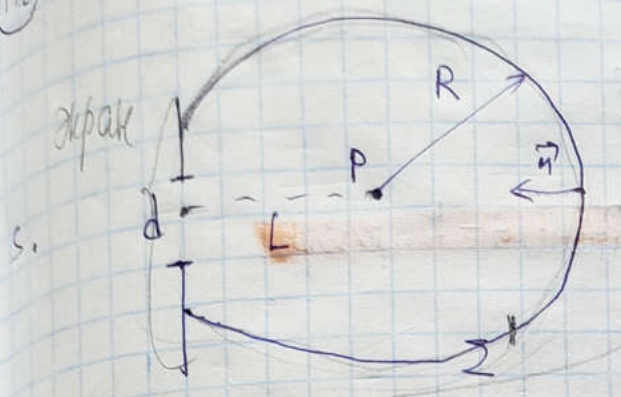
(70)

$$A(k_x, k_y, t) = \frac{ik}{2\pi z} e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2z}} \int A(x', y') e^{i(k_x x' + k_y y')} dx' dy'$$

$\max \{ (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \} \ll z$

Решение уравнения

14.5. Уравнение излучения Заммерфельда



$$E(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{\text{эк}} + \Sigma_{\text{отб}}} \left(E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n} \right) d\Omega +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma'} \left(E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n} \right) d\Omega'$$

отб в том, что излучение на бесконечности 0. Σ_2

$\Sigma_2 \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n} \right) R = 0$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma'} \left(E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n} \right) R^2 d\omega$$

уравнение Заммерфельда

ω - телесный угол

E - напряженность

$$\frac{\partial}{\partial n} = - \frac{\partial}{\partial R}$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = - \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{e^{-ikR}}{R} \right) = - \left(-ik \frac{e^{-ikR}}{R} - \frac{1}{R^2} e^{-ikR} \right) = \left(ik + \frac{1}{R} \right) \frac{e^{-ikR}}{R}$$

$$\frac{\partial E}{\partial n} = - \frac{\partial E}{\partial R}$$

$$E_{\Sigma} = \frac{e^{-ikR}}{R} + O\left(\frac{d}{R}, \frac{L}{R}\right)$$

напряженность поля

$$\frac{\partial E}{\partial n} = + \left(ik + \frac{1}{R} \right) \frac{e^{-ikR}}{R} + \frac{1}{R} O\left(\frac{d}{R}, \frac{L}{R}\right)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(E \cdot \left(ik + \frac{1}{R} \right) \frac{e^{-ikR}}{R} - \frac{e^{-ikR}}{R} \left(\left(ik + \frac{1}{R} \right) \frac{e^{-ikR}}{R} + \frac{O\left(\frac{d}{R}\right)}{R} \right) \right) = O\left(\frac{L}{R}\right) \rightarrow 0$$

$$E(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{\text{эк}} + \Sigma_{\text{отб}}} \left(E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n} \right) d\Omega$$

сумма экран и отб

приближения

Кулидара

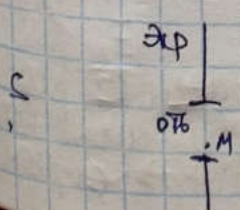
1) поле в области совпадает с тем, которое было бы в отсутствие экрана

$$E_{\text{эк}} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial n} |_{\text{эк}} = 0$$

на самом деле экран выделен на поле

Еотб - не возмущено экраном

$$E_{\text{отб}} = E_S(M), \quad M \in \Sigma_{\text{отб}}$$

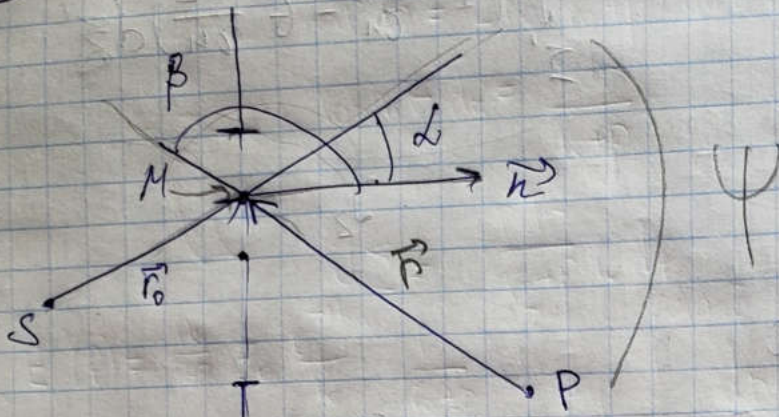


$$E(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{orb}} \left(E_s(M) \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E_s(M)}{\partial n} \right) d\Sigma_{orb}$$

$$E_s(M) = E_0 \frac{e^{-ikr_0}}{r_0}$$

$$E(p) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \left(E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n} \right) d\Sigma$$

14.4 Оптическое приближение. Формула Френеля-Кирхгофа.



У приближения Кирхгофа

$$E_s(M) = E_0 \frac{e^{-ikr_0}}{r_0}$$

$$G(M) = \frac{e^{-ikr}}{r}$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r} \cos \beta = \frac{e^{-ikr}}{r} \left(-ik - \frac{1}{r} \right) \cos \beta$$

$$\frac{\partial E}{\partial n} = \frac{\partial E}{\partial r_0} \cdot \frac{\partial r_0}{\partial n} = \frac{\partial E}{\partial r_0} \cos \alpha = \underbrace{E_0 \frac{e^{-ikr_0}}{r_0}}_{E_s(M)} \left(-ik - \frac{1}{r_0} \right) \cos \alpha$$

Оптическое приближение
 $|k| = |i \frac{2\pi}{\lambda}| \gg \frac{1}{r}, \frac{1}{r_0}$

$$\lambda \ll r, r_0$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} \approx -ikG \cos \beta$$

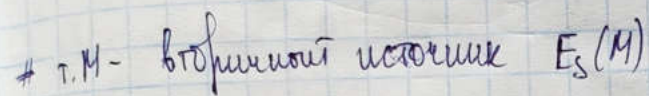
$$\frac{\partial E}{\partial n} \approx -ikE_s(M) \cos \alpha$$

$$E(P) = \frac{ik}{4\pi} \int_{\Sigma_{orb}} E_s(M) [-\cos \beta + \cos \alpha] G d\Sigma_{orb}$$

14.5 Принцип Гюйгенса-Френеля

Каждый элемент волнового фронта можно рассматривать как центр вторичного волнового излучения, порождающего вторичные сферические волны, а результирующее световое поле будет суперпозицией

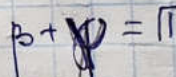
72



* $E(p)$ - р-т суперпозиции палеомагнитных источников $E_S(M) \left[\int E_S(M) d\Sigma \right]$

Поверхность конуса сдвигается на $\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{i}{4\pi} \int$

важният фронт источник?



$$\cos B = -\cos \psi$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 1 + \cos \gamma$$

$$E(P) = \frac{ik}{4\pi} E_0 \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \int_{\Sigma_{\text{orb}}} \underbrace{(1 + \cos\psi)}_{K(\psi)} \underbrace{\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)}_{6} d\Sigma$$

фактор k медленно убывает.

Население ²⁰¹⁸ года Приморья

(сублиминальное кодирование)

проводим сферу радиуса $\rho + \frac{1}{2}$

$$L_n = \sqrt{\frac{r_o p h}{r_o + p}} \cdot h$$

сферические капли

Можно использовать формулу косинусов.

$$d\Sigma = r_0 \sin\theta \, d\varphi \cdot r_0 \, d\theta$$

$$\{\varphi, \theta\} \rightarrow \{\varphi, r\}$$

$$\Delta SMP: \quad SM \quad PM \quad SP$$

$$r^2 = r_0^2 + (r_0 + p)^2 - 2r_0(r_0 + p)\cos\theta$$

$$2r \, dr = 2r_0(r_0 + p) \sin\theta \, d\theta$$

$$r_0 \sin\theta \, d\theta = \frac{r \, dr}{r_0 + p}$$

$$d\Sigma = \frac{r \, dr}{r_0 + p} r_0 \, d\varphi$$

$$E(p) = \frac{ik}{4\pi} E_0 \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \frac{r_0}{r_0 + p} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr (1 + \cos\varphi) \frac{e^{-ikr}}{r \cdot r}$$

$$E(p) = \frac{ik}{2} E_0 \frac{e^{-ikr_0}}{r_0 + p} \int_{r_{min}}^{r_{max}} K(\varphi) e^{-ikr} dr$$

$$E(p) = \frac{ik}{2} E_0 \frac{e^{-ikr_0}}{r_0 + p} \sum_{n=1}^N K(\varphi_n) \int_{p_0 + (n-1)\frac{\Delta}{2}}^{p_0 + n\frac{\Delta}{2}} e^{-ikr} dr$$

$$= \frac{1}{ik} \left[e^{-ik(p_0 + n\frac{\Delta}{2})} - e^{-ik(p_0 + (n-1)\frac{\Delta}{2})} \right]$$

$$= \frac{1}{ik} e^{-ikp_0} e^{-ikn\frac{\Delta}{2}} (1 - e^{-ik\frac{\Delta}{2}})$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$ik\frac{\Delta}{2} = i\pi$$

$$E(p) = \frac{ik}{2} E_0 \frac{e^{-ikr_0}}{r_0 + p} \cdot 2 \left(-\frac{1}{ik} \right) \sum_{n=0}^N K_n (-1)^n$$

$$E(p) = \sum_{n=0}^N E_n$$

$$E_n = E_0 \frac{e^{-ik(r_0 + p)}}{r_0 + p} K_n (-1)^{n-1}$$

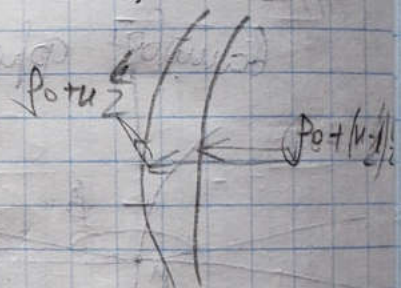
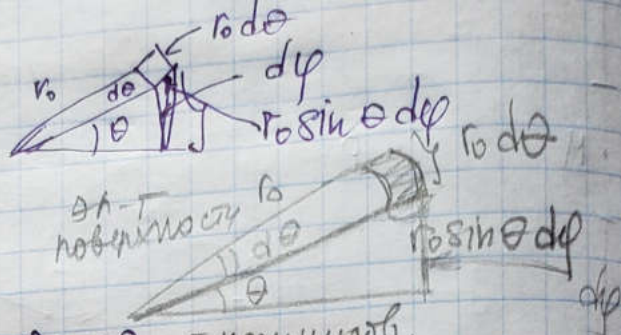
т.к. $K_{n+1} < K_n$, то $|E_{n+1}| < |E_n|$

E_n и E_{n+1} в фазе.

$$E_N(p) = \frac{E_0}{2} \pm \frac{E_N}{2}$$

↑ " N-член
" " N-член

$$E_N \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty$$



$$N=\infty \quad E|_{N=\infty} = \frac{E_0}{2}$$

$$I|_{N=\infty} = \frac{E_0^2}{4}$$

$$N=1 \quad E|_{N=1} = E_0$$

$$I|_{N=1} = E_0^2 = 4 I|_{N=\infty}$$

- constructive interference

$$N=2 \quad E|_{N=2} = E_1 - E_2 \approx 0 \quad I|_{N=2} \approx 0$$

$$N=3 \quad E|_{N=3} = E_1 - E_2 + E_3 \approx E_1$$

Субъективно p $R_n \uparrow, N_{отв} \downarrow$
 $p \downarrow$ $R_n \downarrow$ $N_{отв} \uparrow$

интерфер. макс.



$$\sum_{n=1}^N E_n$$

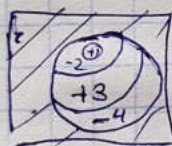
Метод Пуассона

на апертуру дифракционной решетки падает плоская волна, разбивается на волны от каждого отверстия

Точки на апертуре - источники вторичных волн, которые

Все эти волны interfere и образуют дифракционную картину от края решетки до любой точки на ее оси - в результате они формируют

в дифракционной решетке и интерференцию, создавая яркое пятнышко



Зонная пластинка амбицидная

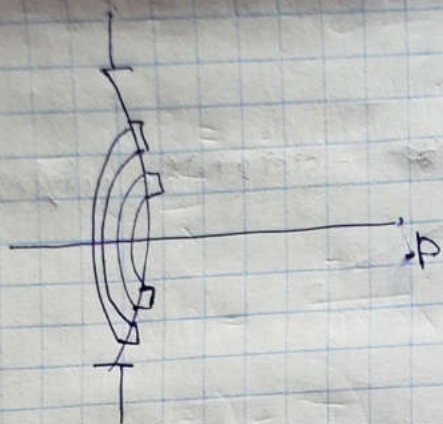


$$E(p) = \sum_{n=2n+1}^N E_n = \text{max}$$

$$E(p) = E_1 + E_3 + E_5$$

Рядовая зональная линза

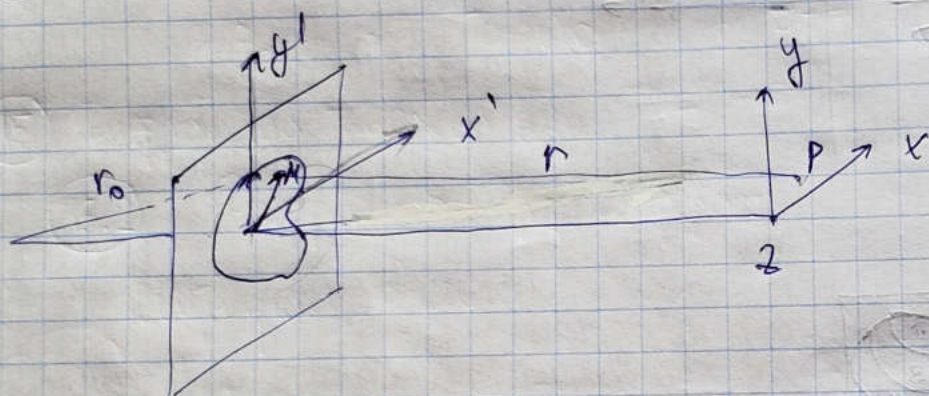
$$E(P) = E_1 - E_2(-1) + E_3 - E_4(-1)$$



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 f_2}$$

146 Дифракция Френеля



$$E(P) \equiv E(x, y, z) = \frac{ik}{4\pi} \int E_S(x', y') (\cos \alpha - \cos \beta) \frac{e^{-ikr}}{r} dx' dy'$$

$$\text{Макс } \sqrt{x'^2 + y'^2} \ll z, \text{ Макс } \sqrt{x^2 + y^2} \ll z$$

$$\text{Тогда } \cos \alpha \approx 1$$

$$\cos \beta \approx -1$$

лучи далеко
отверстие небольшое

$$r = \sqrt{z^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2}$$

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{z}$$

$$\text{Далее } kr \ll e^{-ikr}$$

$$r = z \left(1 + \frac{(x-x')^2}{2z^2} + \frac{(y-y')^2}{2z^2} \right)^{1/2}$$

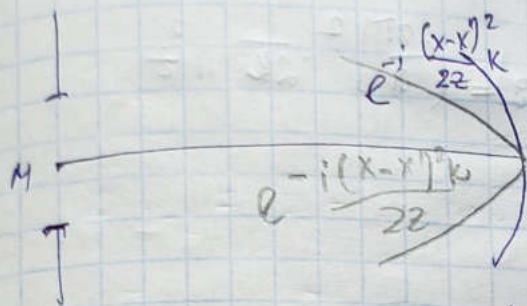
близко

$$r \approx z \left(1 + \frac{(x-x')^2}{2z^2} + \frac{(y-y')^2}{2z^2} \right)$$

$$E(x, y, z) = \frac{ik}{4\pi} \int E_S(x', y', 0) \cdot 2 \cdot \frac{1}{z} \cdot e^{-ikz \left(1 + \frac{(x-x')^2}{2z^2} + \frac{(y-y')^2}{2z^2} \right)} dx' dy'$$

$$E(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi z} e^{-ikz} \int E_S(x', y', 0) e^{-i \frac{(x-x')^2}{2z}} e^{-i \frac{(y-y')^2}{2z}} dx' dy'$$

используем параболу



$$\begin{aligned} \zeta(x, y, z) &= E(x, y, z) e^{i\omega t} \\ \zeta(x, y, z) &= A(x, y, z) e^{i(\omega t - kz)} \\ E(x, y, z) &= A(x, y, z) e^{-ikz} \end{aligned}$$

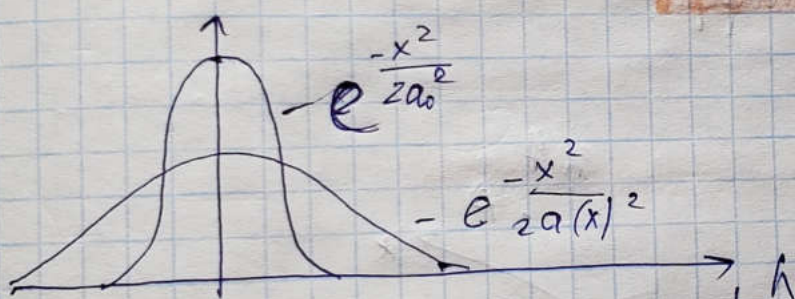
$$A(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi z} \int A(x', y', z=0) e^{-\frac{ik}{2z} [(x-x')^2 + (y-y')^2]} dx' dy'$$

$$2ik \frac{\partial A(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}$$

параболическое
у-е дифракции
просто написать

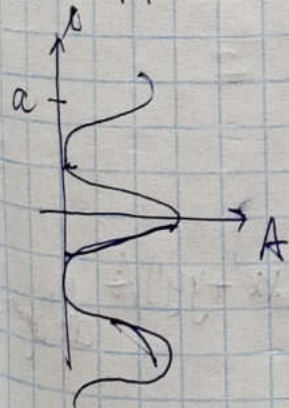
$$A(x, y, z) = \frac{A_0}{a_0} a(z) e^{-\frac{x^2+y^2}{2a(z)^2}} e^{-i\frac{k(x^2+y^2)}{2R(z)}}$$

написать фр-е дифракции



$$a(z) = a_0 \left(1 + \left(\frac{z}{L_g} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad L_g = \kappa a_0^2$$

14.7 Дифракция Тейлора



$$A(x, z=0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(0) e^{i \frac{2\pi}{a} nx} \quad \text{— разложение в ряд Фурье}$$

$$\text{т.к. } A(x, 0) = A(x \pm a, 0)$$

$$2ik \frac{\partial A(x, z)}{\partial z} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \quad \text{— параболическое у-е дифракции}$$

$$A(x, z) = A(x \pm a, z)$$

— разложение в ряд Фурье

$$A(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z) e^{i \frac{2\pi}{a} nx}$$

— разложение в ряд Фурье
подставим в у-е

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2ik \frac{dA_n}{dz} e^{i \frac{2\pi}{a} nx}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z) \left(-\left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 \right) e^{i \frac{2\pi}{a} nx}$$

$$2ik \frac{dA_n(z)}{dz} + n^2 \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 A_n(z) = 0 \quad n=0 \dots \infty$$

разложение Фурье ортогонально

$$A_u(z) = A_u(0) \cdot e^{-\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 z} \frac{W}{2ik}$$

$$A_n(z) = A_n(0) e^{i\varphi_n(z)}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$u_n(z) = \frac{\pi^2}{a^2} \ln^2 z$$

$$\psi_1(r) = \frac{2\pi}{r^2}$$

$$Z_T = \frac{2a^2}{h}$$

$$A(x, z) = \sum A_n |0\rangle e^{i \frac{2\pi}{q} n x}$$

$$\frac{\pi}{a^2} \cdot \sqrt{z} = 2\pi$$

$$\psi_n = 2\pi \cdot h^2$$

$$A(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z) e^{ik_n(x)} = A(x, z)$$

$$A(x, z_r) = A(x, \theta)$$

11 z_4 - yet таубо

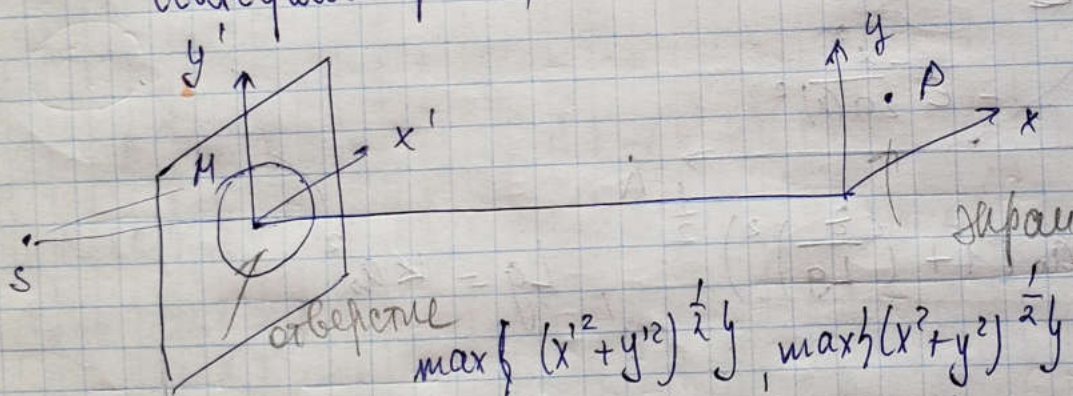
$$z_T = \frac{2a^2}{\lambda}$$

Тавтология — если есть цифр
 света на период. структура,
 то с определенной
 периодичностью
 пр-е воспроизводства
 начального периода.

⑮ Дифракция плоских волн.

15.1) Ризохи́зид Араука́фера

Исхрани Арени



$$A(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi z} \int A(x', y') e^{ik[(x-x')^2 + (y-y')^2]/2z} dx' dy'$$

$$\psi(x, y, z, t) = A(x, y, z) e^{i(\omega t - kx)} = E(x, y, z) e^{i\omega t}$$

$$A(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi z} e^{-ik(x^2+y^2)/2z} \int A(x', y') e^{-ik(x'^2+y'^2)/2z} e^{ik(xx'+yy')/z} dx' dy'$$

$$\max \{K(x^2+y^2) \mid 2z\} < 1$$

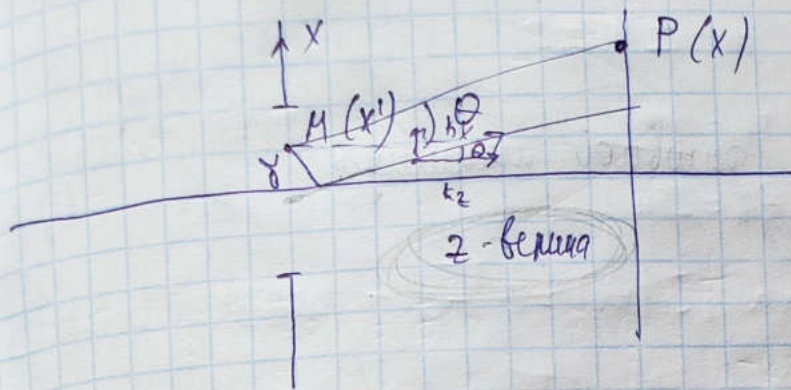
$$\max \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} \frac{(x^2 + y^2)}{27} \mid x \leq 1 \right\}$$

Пусть $\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{D}{2\epsilon} \ll \pi$

$$p \ll \sqrt{kz}$$

переходим к дифференциалу трансформера.

$$A(x,y,z) = \frac{ik}{2\pi z} e^{+ik \frac{x^2+y^2}{2z}} \int A(x',y') e^{ik(\frac{y}{z}x' + \frac{x}{z}y')} dx' dy'$$



$$kx = k \sin \theta x = k \theta x'$$

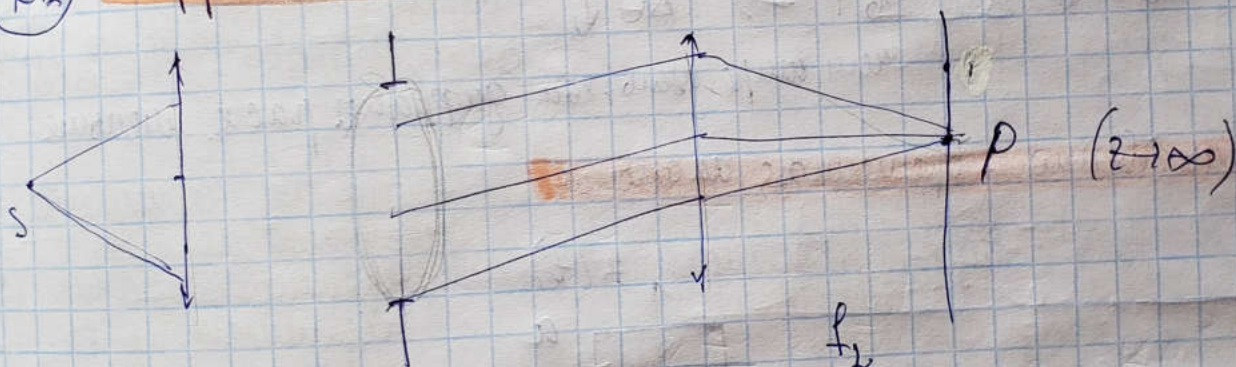
$$ik \frac{x}{z} x' = ik x' \sin \theta = ik \delta(x', \theta) = ix' k_x$$

$$A(x,y,z) \equiv A(\theta_x, \theta_y, z) = A(k_x, k_y) = \frac{ik}{2\pi z} e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2z}} \int A(x',y') e^{i(k_x x' + k_y y')} dx' dy'$$

Sort.

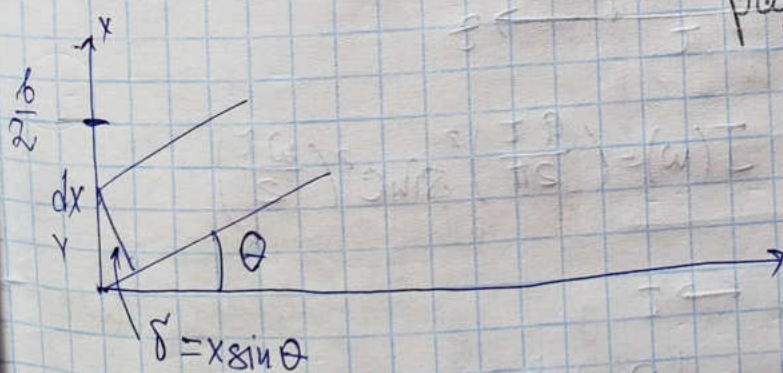
$S^*(k_x, k_y)$
скаляр (скаляр $P_{\text{плоск}}$)

(15.2) Профракция на щели



рассеиваем на щели

$$\delta = x \sin \theta$$



можем найти

$$dA = A_0 \frac{dx}{b} e^{+ik\delta}$$

$$dS(x,z) = A_0 \frac{dx}{b} e^{i(\omega t - kz + k\delta(x))}$$

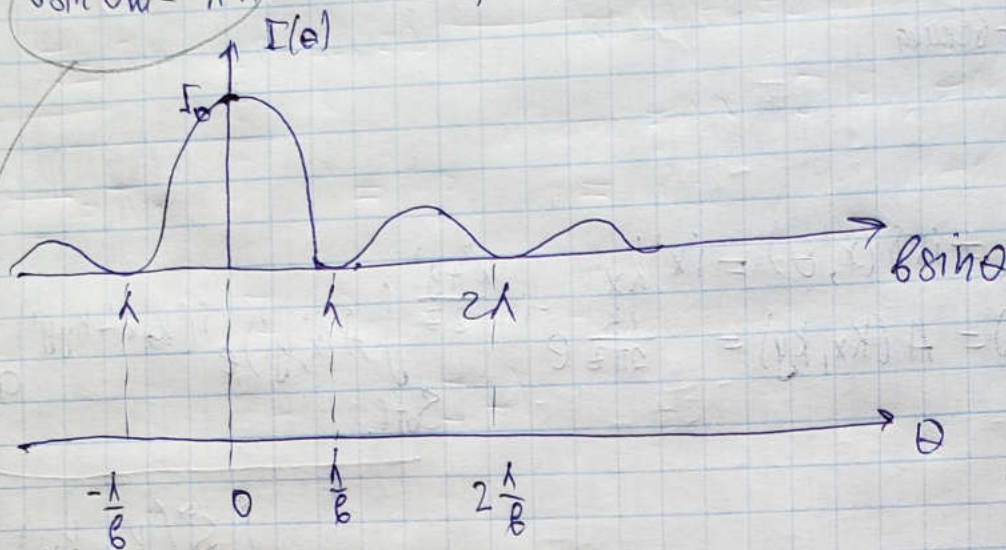
$$A(\theta) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dA(\theta) = \frac{A_0}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{ikx \sin \theta} dx = \frac{A_0}{b} \frac{1}{ik \sin \theta} [e^{ik \frac{b}{2} \sin \theta} - e^{-ik \frac{b}{2} \sin \theta}]$$

$$A(\theta) = -A_0 \frac{\sin(\frac{kb}{2} \sin \theta)}{\frac{kb}{2} \sin \theta}$$

$$I(\theta) = I_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{\kappa b}{2} \sin \theta \right)$$

$$\frac{\kappa b}{2} \sin \theta = m\pi \quad - m \neq 0, \text{ то } I(\theta) = 0$$

$$b \sin \theta_m = \lambda \cdot m \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \quad - \text{основной минимум}$$



Дифракционная расходимость.

$$\Delta \theta = \frac{1}{2} (\theta^+ - \theta^-) = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{b} - \left(-\frac{\lambda}{b} \right) \right)$$

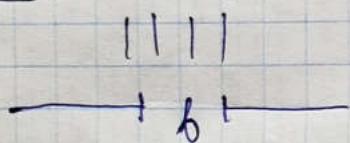
$$\Delta \theta = \frac{\lambda}{b}$$

$$b \uparrow \rightarrow \Delta \theta \downarrow$$

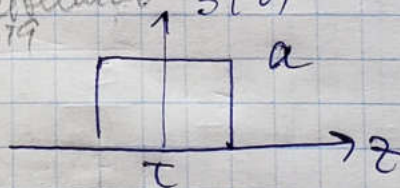
чем шире щель, тем

уменьшение светового потока
за счет дифракции света на краях щели
дифракц. расх. меньше

15.3 Пространственно - временная аналогия



κ - волн. число
пространственная частота



теорема о ширине
частотной полосы
черенковании в
терминах пр-ва

$$I(\theta) = I_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{\kappa b \sin \theta}{2} \right)$$

$$I(\omega) = I_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{\kappa b \omega}{2} \right)$$

$$I(\omega) = \left(\frac{q \tau}{2\pi} \right)^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega \tau}{2} \right)$$

квадрат спектра
интенс. или

$$b \leftrightarrow \tau$$

$$\kappa b = \kappa \theta \leftrightarrow \omega$$

$$\Delta \omega \tau = 2\pi$$

$$\Delta \theta = \frac{\lambda}{b}$$

$$\kappa \Delta \theta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{b}$$

$$\Delta \kappa b = 2\pi$$

15.4 Бумажная, газонная зона дифракции. Геометрическое изображение

$$h_n = \sqrt{\frac{n \lambda r_0}{r_0 + r}}$$

$$R_n |_{r_0 \rightarrow \infty} = \sqrt{n \lambda r}$$

геометрическое приближение

$$D = \sqrt{N \lambda r}$$

$$D \gg \sqrt{\lambda r}$$

$$N_{\text{Фр}} \gg 1$$

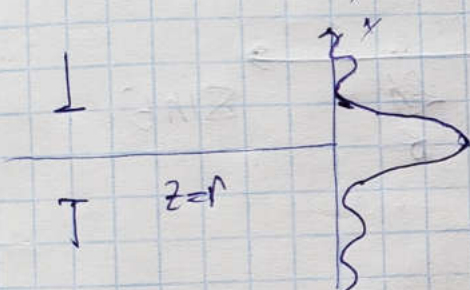
D - параметр, связанный с
размерами щели
 Φ - расстояние от щели до
экрана

N - кол-во зон Френеля?

2) Дифракция Френеля

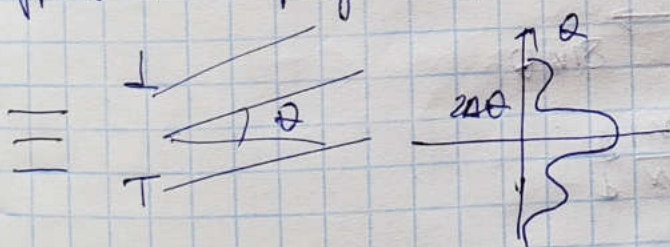
$$N_{\text{Фр}} \sim 1 \div 10$$

Ближняя зона



кольца Френеля
дифракции

3) Дифракция Фраунгофера



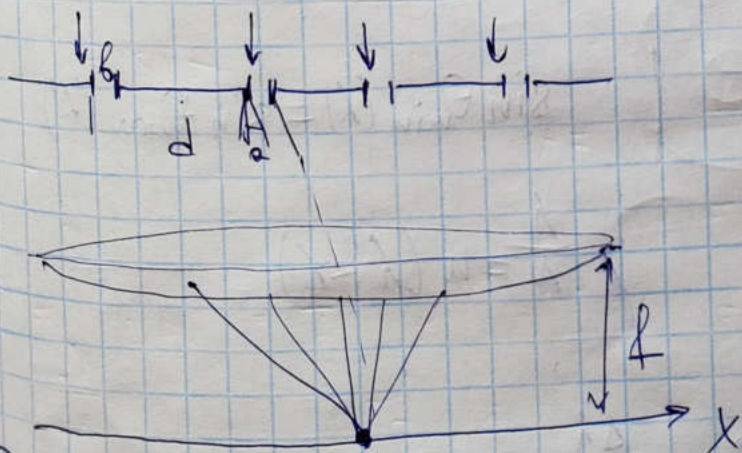
$D \ll \sqrt{\lambda z}$, $N_{\text{Фр}} \ll 1$
дальняя зона

15.5 Дифракционная решетка

N - число щелей

Многолучевая интерф.

$$I(\theta) = I_0(\theta) \cdot \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$



Для дифракционной решетки

$$I(\theta) = I_0(\theta) \cdot \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$I_{\theta}(\theta) = I_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{k b \sin \theta}{2} \right) - \text{qui} \text{ egevenot}$$

$$I_{\theta}(\theta) = 0 \text{ upu } \frac{k b \sin \theta}{2} = \pi n, n = \pm 1, \pm 2.$$

$$\text{osobuot mummuyet } b \sin \theta_m = \lambda n$$

$$\frac{\varphi}{2} = \pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2$$

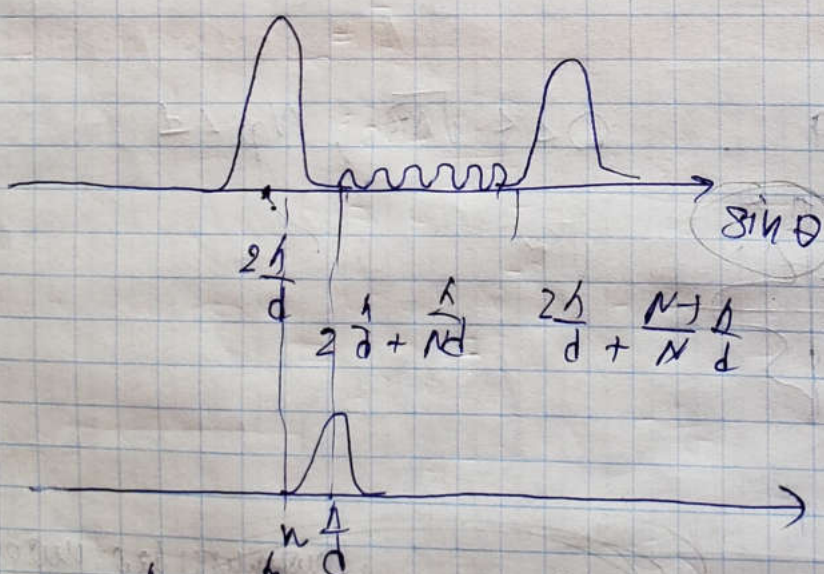
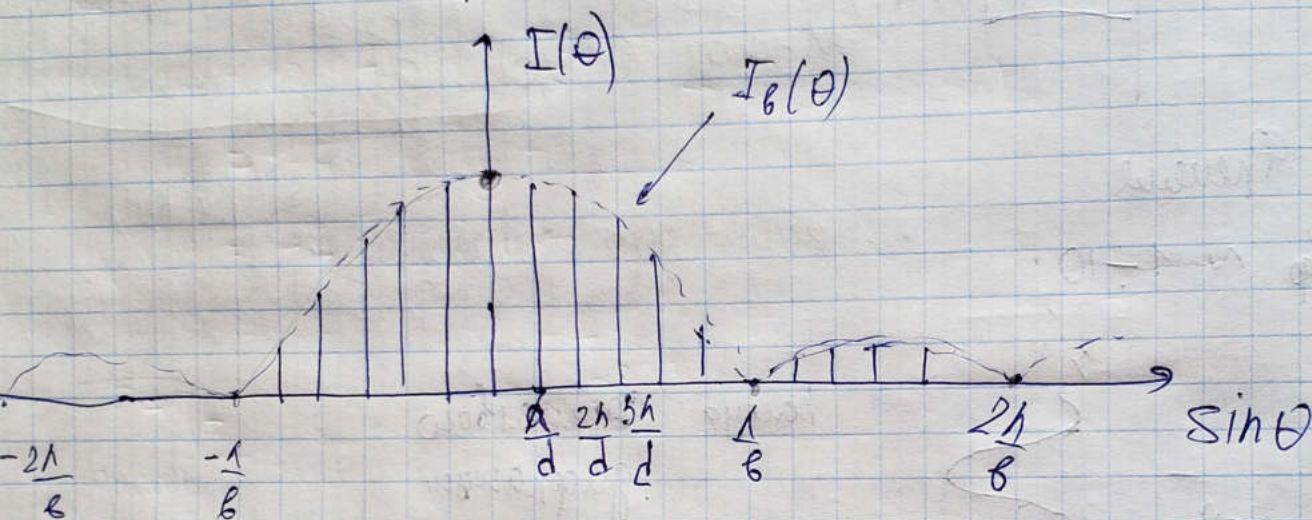
$$k b \sin \theta_n = 2\pi n$$

$$d \sin \theta_n = n \lambda, I(\theta_n) = N^2 I_0 - \text{maxuot maxuot}$$

$$\frac{N \varphi}{2} = \pi q, q = N p, q = 1, 2, 3, \dots, N-1, N+1, \dots$$

cb-ba sinc

$$I(\theta_q) = 0 - \text{mummuyet}$$



$$n \frac{\lambda}{d} + \frac{\lambda}{Nd} = \sin \theta_{\min}(\lambda)$$

$$n \frac{\lambda'}{d} = \sin \theta_{\max}(\lambda')$$

$$n \frac{\lambda}{d} + \frac{\lambda}{Nd} = n \frac{\lambda'}{d}$$

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{1}{nN}$$

$$n = 1 \div 3$$

$$N \sim 10^3$$

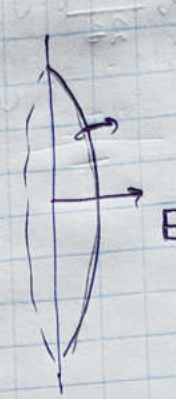
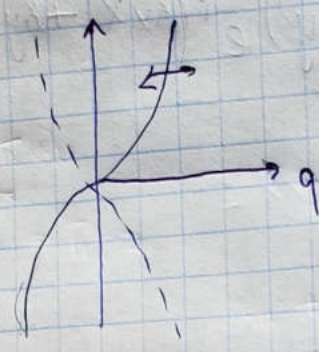
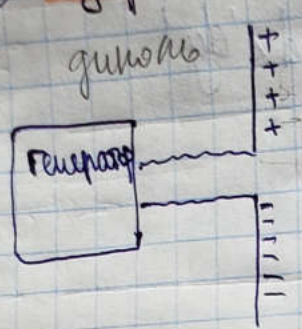
$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} \sim 3 \cdot 10^{-5}$$

$$\sin \theta_{\min}(\lambda) = \sin \theta_{\max}(\lambda')$$

$$\frac{\lambda}{N} = n(\lambda' - \lambda)$$

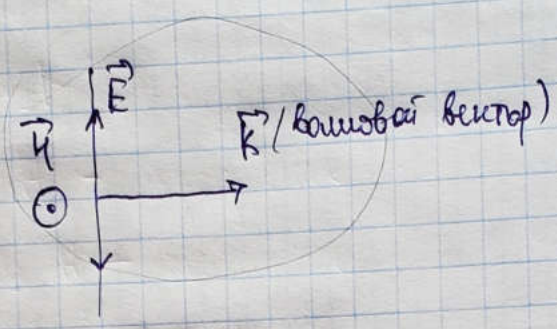
16) лазерное излучение.

16.1) Излучение атома.



диполь

малая картина



L-размер диполя

$$P = qL$$

диполь

$$W \sim P^2 \nu^4$$

L-размер диполя

$$L = \frac{\lambda}{2}$$

$$\nu = 300 \cdot 10^6 \text{ Гц}$$

$$\lambda = c \cdot T =$$

$$\frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{8 \cdot 10^8 \text{ 1/с}} \approx 1 \text{ м.}$$

Видимое излучение

$$\lambda = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$L \sim 10^{-7} \text{ м.}$$

Излучать диполь сами атомы.

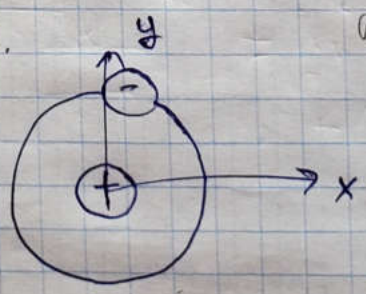
Модель Томсона

$$p_x \sim x(t) \cdot q$$

$$p_x \sim p_0 \cos \omega t$$

$$w_\omega = \frac{k \cdot T}{\pi^2 c^3} \omega^2$$

- объемная плотность энергии, которую излучает атом



атом - форма шара

P_x

$$\Sigma W = \frac{\partial w}{\partial \nu}$$

$$K = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\partial w}{\partial \nu}$$

атом непрерывно излучает энергию

$$W = \int_0^\infty w_\omega d\omega \rightarrow \infty \text{ (излучит бесконечность и полностью остынет)}$$

Планк

$P_n \sim e^{-\frac{W_n}{kT}}$

переходы и излучение.

вероятность $\rightarrow 0 \Rightarrow$ дурши конечна

чем больше энергии, тем меньше вероятность того, что как-то из этого уровня

$$W_{\omega} = \frac{\hbar \omega_{nm}}{\pi^2 c^2} = \frac{W_n - W_m}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1}$$

$\hbar \omega \ll kT$
энергия сур. сч. излучения

$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж.с - постоянная Планка

Атом Бора:

$\hbar \omega_2 = W_2 - W_0$
 $\hbar \omega_{nm} = W_n - W_m$

16.2 Спонтанное и вынужденное излучение. Взвешивание мод.

использование

$$\frac{dN_m}{dt} = -A_{nm} N_m \cdot F_{nm}$$

$F_{nm} = \frac{W_{nm} \cdot c}{\hbar \omega_{nm}}$

$\omega_{nm} = \frac{W_n - W_m}{\hbar}$

$[F_{nm}] = \frac{1}{m^2 \cdot s}$

вероятность перехода

Спонтанное излучение - процесс самопроизвольного испускания ЭМ излучения квантовой системой при их переходе из возбужденного состояния в стабильное.

$$\frac{dN_n}{dt} = -B_{nn} N_n dt$$

Спонтанное и вынужденное излучение не когерентно.

Вынужденное излучение

излучение любого фотона при переходе квантовой системы между двумя состояниями под воздействием излучения с той же частотой, фотон, энергия которого равна разности энергий этих состояний

когерентное излучение фотона

$$\frac{dN_n}{dt} = -A_{nn} \cdot N_n \cdot F_{\omega}$$

$$A_{nn} = A_{nn} - A$$

(6.5) Коэффициент усиления. Частота излучения: $\lambda_{из}$



$$\omega_{21} = \frac{W_2 - W_1}{\hbar}$$

усиление света происходит

возбужденное вещество излучает спонтанно-вынужденное (индуцированное) излучение.

$$F_{\omega} = C \cdot N_{\omega}$$

$$dN_{\omega} = |N_2| - |dN_1|$$

$$dN_2 = -A F_{\omega} N_2 dt - \text{излучение}$$

$$dN_1 = -A F_{\omega} N_1 dt - \text{поглощение}$$

$$dN_{\omega} = A F_{\omega} N_2 dt - A F_{\omega} N_1 dt$$

$$dt = \frac{dz}{c}$$

$$\frac{dN_{\omega}}{dt} = A F_{\omega} (N_2 - N_1)$$

$$\frac{dN_{\omega}}{dt} > 0, \text{ если } N_2 > N_1$$

$$P_{W_2} \sim e^{-\frac{W_2}{kT}}$$

наименьшее

$$P_2 = (N_1^e + N_2^e) e^{-\frac{W_2}{kT}} = N_2^e$$

$$(N_1^e + N_2^e) e^{-\frac{W_1}{kT}} = N_1^e$$

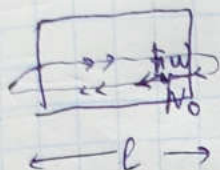
т.к. $W_2 > W_1$ то в равновесии $N_2^e < N_1^e$

Среда $W_2 > W_1$, в которой $N_2 > N_1$, активная, неравновесная, gain-материал, инверсия.

ЛАЗЕР LASER light amplification by stimulated emission

- 1) активная среда где усиление
- 2) выводящая оптика через которую излучение - отходит

лучок



материальная

→

$$F_w = c \cdot N_w$$

$$dN_w = (N_2 - N_1) A \cdot F_w dt \quad dt = \frac{dz}{c}$$

$$dN_w = (N_2 - N_1) A N_w dz$$

$$N_w(z) = N_w(0) \cdot e^{(N_2 - N_1) A z}$$

$$N_w(z) = N_w(0) e^{(N_2 - N_1) A \cdot z}$$

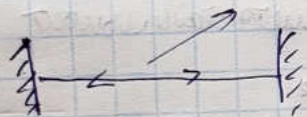
$$R < 1$$

$$A_{mn} = A_{nm} = A$$

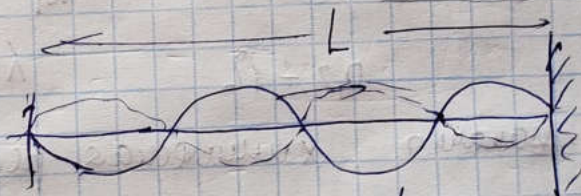
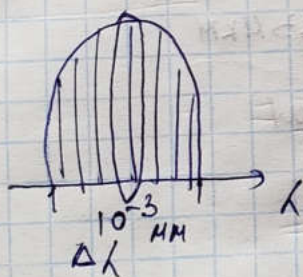
Свойства:

когерентно т.к. оно из-за стимулированных переходов

направленные: т.к. обратное свечение излучения по оси.



монохроматичность.



стационарное поле

$$L = n \frac{\lambda}{2}$$

$$L \sim 10^{-2} \text{ м} \approx 1 \text{ см}$$

$$n = \frac{2 \cdot 10^{-1} \text{ м}}{0.5 \cdot 10^{-6} \text{ м}} = 10^5$$

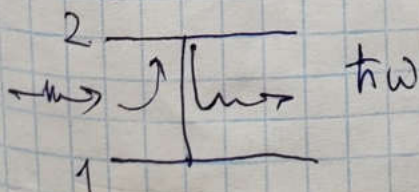
$$L = n \frac{\lambda}{2}$$

$$L = n' \frac{\lambda + \delta \lambda}{2}$$

$$\delta \lambda \sim \frac{\lambda}{n^2} \sim 10^{-5} \text{ нм}$$

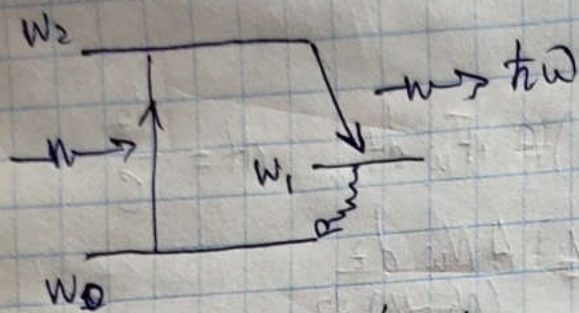
16.4 Каканка

два уровня



процесс перекачки энергии внешнего источника в рабочую среду лазера. Положенная энергия переходит в возбужденное состояние атомов и молекул. Начиная действовать механизм вынужденного излучения и происходит излучение лазера.

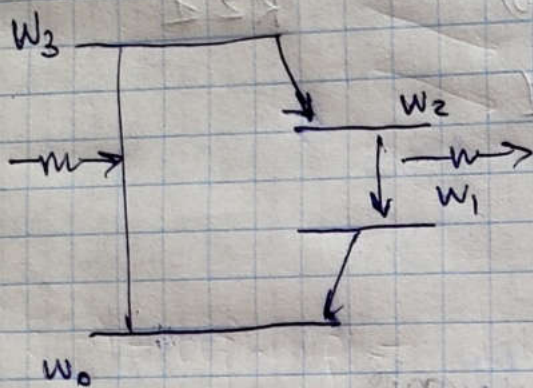
Трёхуровневая система



$$N_0^e \gg N_1^e \gg N_2^e$$

$$N_2 > N_1$$

Четырёхуровневая

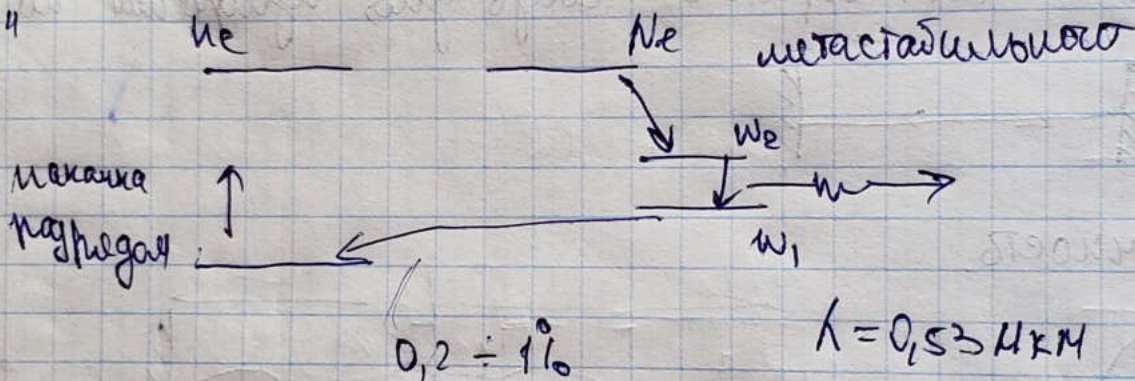


метастабильность

$$\tau \sim 10^{-3} \div 10^{-4} \text{ с}$$

1) Газовые лазеры

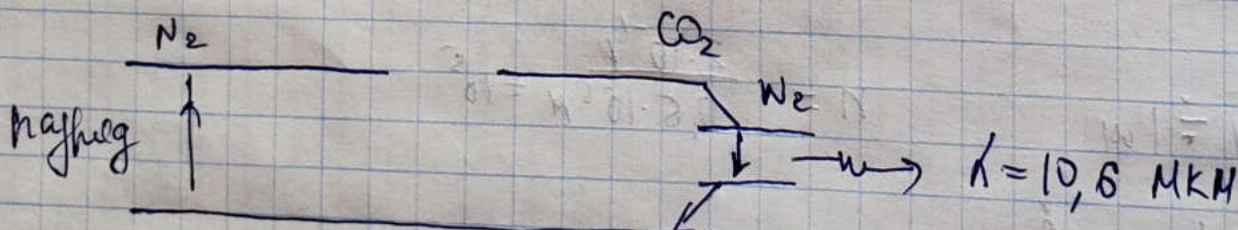
"He - Ne"



$$\lambda = 0,53 \text{ мкм}$$

Подобный лазер накачка химическая реакция

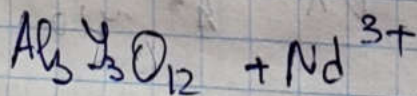
CO₂-лазер



$$\text{КПД} \sim 20\%$$

твердотельная

УАС



$$\lambda = 1,06 \text{ мкм}$$

n/n лазеры:

"nn" - типа



Ge - 4^x
As - 5^x

"p" - типа



Ge - 4^x
In - 3^x

$$\lambda = 97$$

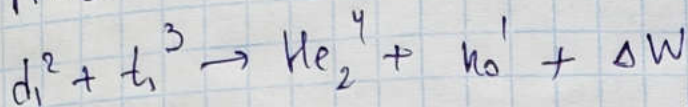
70%



герметич.

(66)

ATC



$$\Delta W \sim 10^{12} \text{ Дж}$$



$$\Gamma \sim 10^{-6} \text{ с}$$

$$N_n \cdot T \sim 10^{20} \frac{\text{с}}{\mu^3}$$

погружена

Точная:

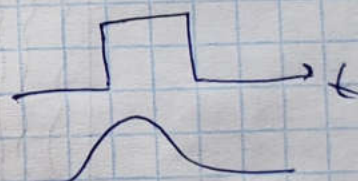
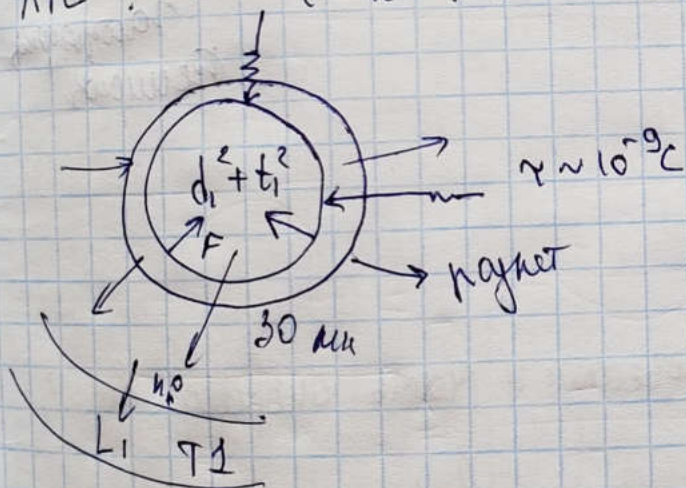
$$\tau \sim 10^{-8} \text{ с}$$

$$N_n \sim 10^{23}$$

ATC:

$$\tau \sim 10^{-8} \div 10^{-9} \text{ с}$$

$$N_n \sim 10^{29} \div 10^{30} \text{ м}^{-3}$$



$$100 \text{ кВ/с}$$

$$N_0 \sim 8 \cdot 10^7$$

$$N \sim 10^3 \text{ г/см}^3$$

Фотокондуктивные пазеры

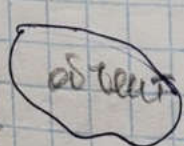
$$\tau_0 \sim 100 \text{ пс} = 10^2 \cdot 10^{-15} \text{ с}$$

(187)

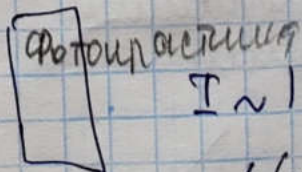
Галогениды

свет. поглотитель

Фотоприемник



по усилению ф. и. ПЗС



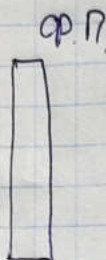
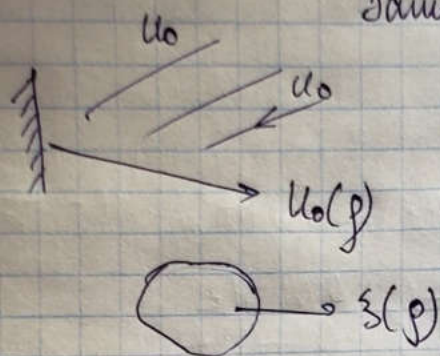
$$I \sim |\xi(p)|^2 = |E(p)|^2 e^{i\varphi(p)}$$

$$\xi(p) = E(p) \cdot e^{i\varphi(p)}$$

задача: регистрировать разность фаз за счет интерференции.

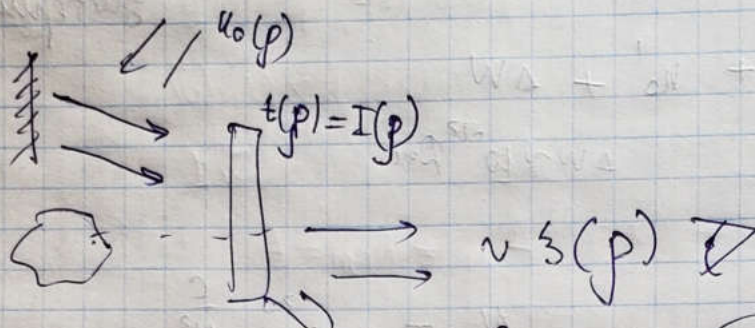
распр-е интенсивности I. некое м. фазовый метод сохраняет информацию о разности фаз за счет

Запись картины.



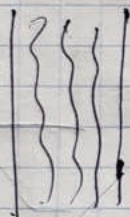
$$I \sim |u_0(p) + z(p)|^2$$

Восстановление картины



$$\varepsilon(p) = t(p) \cdot u_0(p) = |u_0(p) + z(p)|^2 \cdot u_0(p) = \underbrace{(|u_0|^2 + |z|^2)u_0}_{\text{фон}} + \underbrace{2|u_0(p)|^2 z^*(p)}_{\text{10-15\%}}$$

Фон
10-15%
связи с
полюсами
Ренессанс

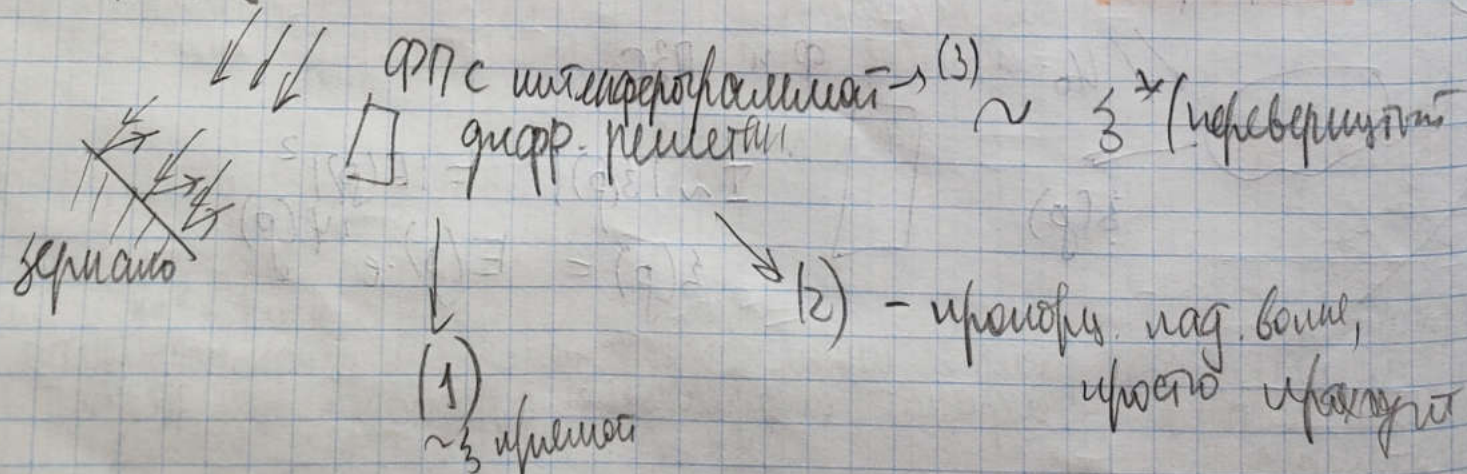


$t(p)$

на ОП ск-сезума: рассеивающийся объект и часть отраженной волны, связанной с объектом, не задевшей его

Используем кол. упр $\Rightarrow$ на пластине регистрируется интерференционная картина. Ее можно упростить до ф. решетки - системы светлых и темных полос. Картина не связана с формой объекта (не накладывается на)

Воспроизведение:



Свет дифрагирует на ФД (4 штифта 3 вала). Наибольшая видна 3, т.е.
как бы сам сам объект (в идеальном случае)

Отсутствие голограмм от фотоснимка.

1) можно рассмотреть объект с разных сторон — идеальное воспроизведение
объекта (в рамках некоторого угла, огранич. углом регистрации)

3* — действ. угол объекта, т.е. где-то в пр. в. будет построена угол-е
объекта, но тоже можно сфотографировать

Ограничение: ширина когерентности

Угол записи: $\Delta\alpha \approx L$ — мин. разн. объекта.

Разрешенная спектральная частота очень мала (исходя из)